

**Esercizio 1 (10 punti)**

a) Definire una codifica per l'insieme Q delle immagini digitali quadrate con 4 mila pixel per lato e con 16 milioni di colori possibili. **(2 punti)**

**Visto che per ogni pixel (16M) ci sono  $16M = 2^{24}$  possibili colori, codificando i colori con stringhe binarie da 24 bit, una possibile codifica per Q è la seguente:  $Q \rightarrow \{ \{0;1\}^{24} \}^{16M}$ .**

b) Sia C l'insieme delle codifiche di tutti e soli gli elementi di Q. Che cardinalità ha C? **(1 punto)**

**Ci sono 16M di colori possibili per ciascuno dei 16M pixel, quindi  $\text{Card}(C) = \text{Card}(Q) = 16M^{16M}$ .**

c) Sia QS il sottoinsieme di Q costituito dalle immagini simmetriche rispetto all'asse verticale. Che cardinalità ha QS? **(2 punti)**

**Ci sono 16M di colori possibili solo per metà dei pixel: il colore dell'altra metà è stabilito dalla simmetria della figura, quindi  $\text{Card}(QS) = 16M^{8M}$ .**

d) Sia CS il sottoinsieme di C costituito dalle codifiche degli elementi in QS. CS è decidibile? **(2 punti)**

**CS è decidibile perché esiste un algoritmo per stabilire, dato un  $x \in C$ , se  $x \in CS$  o meno. La seguente soluzione usa un array di 16M di colori come struttura dati per rappresentare una immagine.**

```
bool fcCS(figC x){
    int i,j;
    for (j = 0; j < 4000; j++)
        for (i = 4000*j; (i+1)%2000 == 0; i++)
            if (x[i] != x[4000-1-i])
                return false;
    return true;
}
```

e) Che cardinalità ha il rango della funzione caratteristica di CS? **(1 punto)**

**Esistono elementi di C che NON sono in CS, e CS NON è vuoto, quindi la f.c. di CS ha rango  $\{0;1\}$  con cardinalità 2.**

f) Indicare un insieme la cui funzione caratteristica abbia un rango con cardinalità inferiore al valore indicato nella risposta alla domanda e). Se tale insieme non esiste, spiegare perché. **(1 punto)**

**La f.c. dell'insieme vuoto restituisce sempre 1, quindi il suo rango è  $\{1\}$  con cardinalità 1.**

g) Indicare un insieme la cui funzione caratteristica abbia un rango con cardinalità superiore al valore indicato nella risposta alla domanda e). Se tale insieme non esiste, spiegare perché. **(1 punto)**

**Tale insieme non esiste perché una f.c. può avere solo 0 oppure 1 come possibili output, quindi non esistono ranghi di f.c. con cardinalità superiore a 2.**

**Esercizio 2 (10 punti)**

a) Dimostrare che l'insieme G delle stringhe binarie infinite non è numerabile. **(6 punti)**

**Cfr. appunti o libro di testo.**

b) Potrebbe almeno essere enumerabile? Perché? **(4 punti)**

**Se G fosse enumerabile, vuol dire che sarebbe il rango di una funzione computabile totale. Computando tale funzione, si può associare un numero naturale a ciascun suo risultato, ossia G sarebbe numerabile. Non essendo G numerabile, G non può essere enumerabile.**

### Esercizio 3 (10 punti)

Scrivere il codice della MT che computa le seguente funzione parziale  $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(x, y, z) = \begin{cases} y - z & \text{se } x = 0 \\ y + z & \text{se } x = 1 \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**// analisi del valore di x**

```
qinizio | S0 D q1barra
q1barra | S0 | D qx=0 // x=0 e va fatta una sottrazione; si aggiunge una barra per facilitare l'operazione
q1barra | S0 | D q2barre
q2barre | S0 S0 | D qx=1 // x=1 e va fatta un'addizione
q2barre | | D qloop
qloop | S0 S0 | D qloop // x>1 e quindi output = ⊥
qloop | | D qloop
```

**// x = 1, addizione y+z**

```
qx=1 | | D qx=1 // si supera y a destra
qx=1 | S0 | D qgotoendz // si colma lo spazio separatore tra y e z per costruire la somma
qgotoendz | | D qgotoendz
qgotoendz | S0 S0 | S qerase1stl
qerase1stl | S0 | S qerase2ndl
qerase2ndl | S0 C q0 // 2 barre sono state cancellate (1 per bilanciare la barra che ha colmato lo spazio separatore,
// 1 perché il risultato dell'addizione ha bisogno di 1 sola barra extra per la codifica anziché 2)
```

**// x = 0, sottrazione y-z**

```
qx=0 | | D qgotoendy
qgotoendy | | D qgotoendy
qgotoendy | S0 S0 | D qstillz?
qstillz? | | D qgotoendz2
qgotoendz2 | | D qgotoendz2
qgotoendz2 | S0 S0 | S qz-1
qz-1 | S0 | S qgotostartz
qgotostartz | | S qgotostartz
qgotostartz | S0 S0 | S qstilly?
qstilly? | S0 S0 | D qloop // z>y, quindi y-z non è definito e output = ⊥
qstilly? | | S qgotostarty
qgotostarty | | S qgotostarty
qgotostarty | S0 S0 | D qy-1
qy-1 | S0 | D qgotoendy
qstillz? | S0 S0 | C q0 // z è stato sottratto: sul nastro c'è y-z oppure è vuoto (z=y+1 quindi y-z non è definito, output = ⊥)
```