

Esercizio 1

Data la funzione s che, dati 3 insiemi A, B e C (finiti, eventualmente vuoti), restituisce l'insieme D degli elementi presenti sia in A , sia in B , sia in C , e l'insieme E degli elementi che sono presenti solo in uno degli insiemi di input, rispondere alle seguenti domande con adeguate giustificazioni.

In termini insiemistici, $s(A,B,C) = (A \cap B \cap C, (A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C)) \cup (C - (A \cup B)))$

a) Qual è il rango di s ?

$F \times F$, dove F è l'insieme dei sottoinsiemi finiti o vuoti di \mathbb{N}

b) Che cardinalità ha il rango di s ?

F è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle stringhe binarie infinite che contengono solo 0 da un certo punto in poi (tale punto è la posizione corrispondente al massimo numero incluso nell'elemento di F , seguendo la convenzione di scrivere 1 se il numero è incluso, 0 altrimenti).

Data questa corrispondenza, possiamo dire che $\text{Card}(F) = \aleph_0$.

Essendo il rango $F \times F$, ed essendo il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili anch'esso numerabile, la risposta alla domanda è \aleph_0

c) s è iniettiva?

No. Controesempio: $s(\{1\}, \{2\}, \{3\}) = s(\{2\}, \{1\}, \{3\})$. Ad elementi diversi corrisponde lo stesso risultato, quindi la funzione non è iniettiva.

d) Qual è un dominio per cui s risulta essere parziale?

Dal momento che s restituisce un risultato solo se A, B e C sono vuoti o finiti, se prendiamo $\emptyset(\mathbb{N})^3$ come dominio, allora la funzione risulta parziale. Infatti $s(\{\text{numeri pari}\}, \{\text{numeri primi}\}, \{3\}) = \perp$

Esercizio 2

a) Scrivere l'enunciato del teorema di Cantor.

cfr. libro di testo o appunti del corso

b) Dimostrare il teorema di Cantor.

cfr. libro di testo o appunti del corso

Esercizio 3

Scrivere il codice della MT che computa la funzione parziale f che riceve in input una n -upla finita di numeri naturali (opportunamente codificata) e restituisce la stessa n -upla se questa non contiene nemmeno uno zero, altrimenti è indefinita.

$q_1 \mid \mid D q_{\text{alert}}$;la MT legge una barra e si mette in allerta: se arriva uno spazio vuol dire che c'è uno zero
$q_{\text{alert}} s_0 s_0 D q_{\text{loop}}$;c'è effettivamente uno zero: la macchina va in loop
$q_{\text{loop}} s_0 s_0 D q_{\text{loop}}$;loop
$q_{\text{loop}} \mid \mid D q_{\text{loop}}$;loop
$q_{\text{alert}} \mid \mid D q_{\text{go}}$;falso allarme: non si tratta di uno zero e la MT può scorrere tutte le barre
$q_{\text{go}} \mid \mid D q_{\text{go}}$;la MT scorre tutte le barre fino al prossimo spazio
$q_{\text{go}} s_0 s_0 D q_1$;il numero è finito e ce ne può essere un altro, la MT riparte da capo
$q_1 s_0 s_0 C q_0$;i numeri sono finiti, se la MT non è andata in loop si può fermare

Esercizio 4

a) Fornire la definizione di insieme enumerabile.

cfr. libro di testo o appunti del corso

b) Fornire la definizione di insieme decidibile.

cfr. libro di testo o appunti del corso

c) Dimostrare che se un insieme e il suo complementare sono entrambi enumerabili, allora l'insieme è decidibile.

cfr. libro di testo o appunti del corso

d) Dimostrare che se un insieme è il rango di una funzione computabile parziale, esso è enumerabile.

cfr. libro di testo o appunti del corso