Computabilità
Appunti_04 e 05 (07 e 09/12/2022)

Mario Verdicchio
Università degli Studi di Bergamo
Anno Accademico 2022-2023

Numeri cardinali

- Card(N) = $\aleph_0$ (“aleph zero”)
- Card(P(N)) = Card(R) = $\aleph_1$
- Card(P(P(N))) = Card(P(R)) = $\aleph_2$
- …e così via: esistono infiniti ($\aleph_0$) numeri cardinali

Esistenza delle funzioni non computabili 1/3

- Cardinalità dell'insieme Ψ (funzioni N→N):
  - ogni f ∈ Ψ definisce un insieme di coppie (x, f(x)), quindi corrisponde a uno e un solo elemento di P(NxN): esiste quindi una funzione iniettiva da Ψ a P(NxN)
  - NxN ha la stessa cardinalità di N, cioè $\aleph_0$
  - P(NxN) ha quindi la cardinalità di P(N), cioè $\aleph_1$
  - Ψ ha quindi cardinalità ≤ $\aleph_1$
  - ogni elemento di G, ossia ogni stringa binaria infinita può essere vista come una particolare funzione N→N (con rango {0;1}): esiste quindi una funzione iniettiva da G a Ψ
  - quindi Card(G) = $\aleph_1$ ≤ Card(Ψ)
  - unendo i due risultati: Card(Ψ) ≤ $\aleph_1$ ≤ Card(Ψ), ossia Card(Ψ) = $\aleph_1$

Esistenza delle funzioni non computabili 2/3

- Cardinalità dell'insieme Ψ_C (funzioni computabili $N \rightarrow N$):
  - ogni funzione computabile è computata almeno da un algoritmo, quindi $Card(\Psi_C) \leq Card(ALG)$ (ALG: insieme degli algoritmi)
  - per ogni numero naturale n, esiste una funzione computabile fn tale che $fn(x) = n$ per ogni x, quindi $Card(N) \leq Card(\Psi_C)$
  - dal momento che $Card(ALG) = Card(N)$, abbiamo che la cardinalità di Ψ_C non può che essere la cardinalità di N, cioè $\aleph_0$

Esistenza delle funzioni non computabili 3/3

- Cardinalità dell'insieme Ψ_{NC} (funzioni non computabili $N \rightarrow N$):
  - $\Psi = \Psi_C \cup \Psi_{NC}$, inoltre sono chiaramente disgiunti
  - se Ψ_{NC} avesse cardinalità finita oppure pari a $\aleph_0$, Ψ avrebbe cardinalità $\aleph_0$, perché l'unione di due insiemi numerabili è numerabile: si può infatti enumerare l'unione alternando gli elementi provenienti dai due insiemi
  - dato che la cardinalità di Ψ è $\aleph_1$, segue che Ψ_{NC} ha cardinalità $\aleph_1$

Generalità delle funzioni N→N

- Le funzioni monoargomentali N→N sono un caso particolare delle funzioni a più argomenti $N^n \rightarrow N$
- Non si ha comunque perdita di generalità nel trattare solo le monoargomentali, perché le n-uple possono essere codificate in numeri naturali:
  - data una n-upla $(k_1, \ldots k_n)$,
    $t(k_1, \ldots, k_n) = 0k_1{}^*0k_2{}^*0\ldots0k_n{}^*$
    dove $k_j{}^*$ è una sequenza di k_j+1 caratteri '1'
  - data una stringa binaria $b = b_0b_1\ldots b_m$
    $p(b_0b_1\ldots b_m) = \Sigma_{i=0}{}^m (2^i{}^*b_i)$