$G = \{\text{stringhe binarie infinite}\}$

Th: G NON è numerabile

Dimostriamo per assurdo:
- si nega la tesi
- si mostra che da essa deriva una contraddizione logica
- e quindi la logica ci costringe ad accettare la tesi.

Th': G è numerabile

hyp: G è numerabile

allora, le stringhe binarie infinite possono essere messe in sequenza

g ⟶

$g_0 = 0\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0 \dots$

$g_1 = 1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0 \dots$

$g_2 = 1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \dots$

$g_3 = \dots$

$g_4 = \dots$

$g_5 = \dots$

$g_6 = \dots$

$g_7 = \dots$

$\overline{g_K} = \overline{g_{00}}\,\overline{g_{11}}\,\overline{g_{22}} \dots \dots \dots \; g_{KK}$

⊂ : stringa binaria infinita

$g_K = g_{00}\, g_{11}\, g_{22} \cdots g_{KK}\, g_{mm} \dots$

$g_K \in G$

$0 \to 1$

$1 \to 0$

$\overline{g_K} = \overline{g_{00}}\,\overline{g_{11}}\,\overline{g_{22}} \cdots \overline{g_{KK}} \cdots$

che cos'è $\overline{g_K}$?

$\overline{g_K}$ è una s. b. i.

$\overline{g_K} \in G$

$\overline{g_{KK}} = g_{KK}$

$\begin{cases} 1 = 0 & \text{ASSURDO} \\ 0 = 1 & \text{ASSURDO} \end{cases}$

$\overline{g_K}$ come riga della tabella a un certo punto INTERSECA la diagonale principale.
Dove la interseca? Dove l'indice riga e l'indice colonna degli elementi sono uguali, ovvero in $\overline{g_{KK}}$

DOBBIAMO RESPINGERE l'ipotesi che G sia NUMERABILE

$\xrightarrow{\text{quindi}}$ **G non è numerabile**

Altri insiemi non numerabili:
- l'insieme dei punti del segmento $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$

prendiamo un $g^* \in G$

$g^* = \underbrace{0\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0 \dots}$

$-1\;\; -2\;\; -3\;\; -4\;\; -5\;\; -6\;\; -7\;\; -8$

$0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-7} + 2^{-8} \dots$

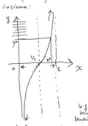
$0{,}362155\ldots \in (0,1)$

$0,\underbrace{\begin{matrix} 9999\overline{9} \\ 00000 \quad 1 \longrightarrow \end{matrix}}$

Corrispondenza biunivoca tra i punti in $(0,1)$ e G (s.b.i.)

$\mathrm{Card}((0,1)) = \mathrm{Card}(G)$

Altro insieme:



$y = \tan\left[\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$

che dominio ha?

che range ha?

$D = (0,1)$

$R = \mathbb{R} = C$ → la f. è suriettiva

la f. è iniettiva perché se $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$

Essendo la f. sia iniettiva sia suriettiva, essa è BIUNIVOCA, cioè abbiamo trovato una funzione tra $(0,1)$ e $\mathbb{R}$ biunivoca.

$\mathrm{Card}((0,1)) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$

$\dots \overset{0\;\;1}{\text{———}} \dots \; \mathbb{R}$

$\mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}((0,1)) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$

$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \neq \mathrm{Card}(\mathbb{R})$

Insieme delle PARTI

Dato un insieme A, l'insieme delle parti di A, che indichiamo con $\mathcal{P}(A)$, è l'insieme di tutti e soli i sottoinsiemi di A.

es. se $A = \{0; 1; 2\}$ allora

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{0;1\}; \{2\}; \{0;2\}; \{1;2\}; \{0;1;2\}\}$

$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(A)) = 8$

$\mathrm{Card}(A) = 3$? $2^3 = 8$

$B = \{4; 5\}$

$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset; \{4;5\}; \{4\}; \{5\}\}$

$\mathrm{Card}(B) = 2$

$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(B)) = 4$ $\quad 2^2 = 4$

Th (possibile)

se A è finito, $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(A)) = 2^{\mathrm{Card}(A)}$

Perché?

Dato A insieme, e dato B suo sottoinsieme, prendiamo $a \in A$ a caso.

$a \in B$? → sì / → no

Dato un sottoinsieme B, la sua stessa esistenza è definita in termini di quali elementi appartengono a B, e quali no.

Dato B, come è fatto?

elenco degli elementi di A:	a_0	a_1	a_2
B	sì	no	no
B'	sì	sì	no
$\emptyset = B''$	no	no	no
$A = B'''$	sì	sì	sì

← quante colonne? Card(A)

← tabella incompleta

quante righe? Ossia, quanti sottoinsiemi di A esistono?

$\underbrace{\overset{\text{sì/no}}{\sqcup}\;\overset{\text{sì/no}}{\sqcup}\;\overset{\text{sì/no}}{\sqcup}\;\overset{\text{sì/no}}{\sqcup}\;\overset{\text{sì/no}}{\sqcup}}_{\mathrm{Card}(A)\text{, quanti sono gli elementi di } A}$

Combinazioni di 2 valori (sì/no) su Card(A) posti, con ripetizione

$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(A)) = 2^{\mathrm{Card}(A)}$ combinazioni possibili

... se A è finito!

E quando A è infinito? 2^∞ non ha senso!

Teorema di Cantor (vale per qualunque insieme: finito o infinito)

se A è un insieme,

$\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$

dimostrazione per assurdo

th. $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$

$\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$ e $\mathrm{Card}(A) \neq \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$

esiste $f: A \to \mathcal{P}(A)$ iniettiva e ~~non~~ esiste $f: A \to \mathcal{P}(A)$ biunivoca

i fatti ci dicono che una $f: A \to \mathcal{P}(A)$ iniettiva esiste,

$f(a) = \{a\}$

per ogni elemento $a \in A$.

$\underset{A}{a} \neq \underset{A}{b}$ $\quad f(a) = \{a\} \in \mathcal{P}(A)$ $\neq$ $f(b) = \{b\} \in \mathcal{P}(A)$

dobbiamo dimostrare che NON esiste una funzione biunivoca tra A e $\mathcal{P}(A)$ sapendo che esiste una funzione iniettiva tra A e $\mathcal{P}(A)$

iniettiva e suriettiva

→ dobbiamo dimostrare che

Th: NON ESISTE una f SURIETTIVA tra A e $\mathcal{P}(A)$

per assurdo:

SUPPONIAMO che esista una $f: A \to \mathcal{P}(A)$ SURIETTIVA

NOTA CONCETTUALE:

A è un insieme di elementi: $\underset{\text{elemento}}{a} \in \underset{\text{insieme}}{A}$

$\mathcal{P}(A)$ è un insieme di sottoinsiemi di A, che sono a loro volta insiemi:

$\underset{\text{elemento}}{a} \in \underset{\text{insieme}}{B} \in \underset{\text{insieme}}{\mathcal{P}(A)}$

$B \subseteq A$ $\quad$ B è un sottoinsieme di A

$B \in \mathcal{P}(A)$ $\quad$ B è un elemento di $\mathcal{P}(A)$

La nostra ipotesi (assurda) è che esista una $f: A \to \mathcal{P}(A)$ SURIETTIVA

questo vuol dire che ogni elemento del codominio è coinvolto nella funzione, ossia

per ogni $A' \subseteq A$, ossia $A' \in \mathcal{P}(A)$

esiste un $a' \in A$ tale che $f(a') = A'$.

Ora, $A' = f(a')$ ← insieme, o meglio, un sottoinsieme di A

quindi ha senso chiedersi:

$\underset{\text{elemento di } A}{a'} \in \underset{\text{sottoinsieme di } A}{f(a')}$?

Sulla base di questa domanda, costruiamo l'insieme B (sottoinsieme di A):

$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$

B è un sottoinsieme di A, quindi, essendo f SURIETTIVA, essa coinvolge B, ovvero: esiste $b \in A$ tale che $f(b) = B$

Domanda: $b \in B$? → sì / → no

~~sì)~~ sì: $b \in B$ Allora b soddisfa la proprietà che definisce B:

$b \notin f(b)$ ⟹ $b \notin B$ ASSURDO.

~~no)~~ no: $b \notin B$

ma questo vuol dire che $b \notin f(b)$

ma allora b soddisfa la proprietà e quindi $b \in B$ ASSURDO.

Come uscire da questa impasse?

Queste contraddizioni nascono dall'esistenza della funzione $f: A \to \mathcal{P}(A)$ suriettiva

L'unico modo per evitare contraddizioni è respingere l'esistenza di una $f: A \to \mathcal{P}(A)$ suriettiva.

ossia NON esiste una f. biunivoca.

dal momento che invece esiste una f. iniettiva:

Th. Cantor: $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$

$G \ni g^* = 0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1 \dots$

$A^{g^*} = \{2; 5; 6; 7; 10; 15; \dots\}$

Ogni stringa binaria infinita può essere vista come un elenco di elementi di un sottoinsieme di $\mathbb{N}$. Tale corrispondenza è BIUNIVOCA.

$g^{\text{pari}} = 1010101010 \dots$

$g^{\text{dispari}} = \overline{g^{\text{pari}}}$

$g^{\mathbb{N}} = 1111111111 \dots$

$g^{\emptyset} = 00000000 \dots$

esiste una f biunivoca tra G e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$

$=$

$\mathrm{Card}(\mathbb{R})$

$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$

Th Cantor: $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$

$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$

$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}(\mathbb{R})$

Domanda:

esiste un insieme A tale che:

$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(\mathbb{R})$

Risposta: NO (crediamo)

ma non c'è ancora una dimostrazione

→ IPOTESI del CONTINUO