Cardinalità

$Card(A) = Card(B)$

$f: A \to B$ f (totale) biunivoca

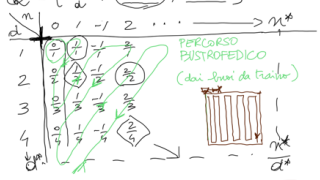
$Card(\mathbb{N}) = Card(\mathbb{Z}) = Card(\text{Pari}) = Card(\text{Dispari})$

def. Un ins. si dice NUMERABILE quando ha la stessa card. di $\mathbb{N}$.

$Card(\mathbb{Q}) = Card(\mathbb{N})$

↳ razionali (numeri che possono essere espressi per mezzo di una frazione)

$\mathbb{Q} = \{ \frac{n}{d} : n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}_0 \}$



$Card(A) = Card(B)$ q. esiste $f: A \to B$ BIUNIVOCA

$Card(A) \leq Card(B)$ q. esiste $f: A \to B$ (totale) INIETTIVA

ci sono tanti elementi in B almeno quanti ce ne sono in A.

$Card(A) < Card(B)$

dobbiamo dimostrare 2 cose:

1) $Card(A) \leq Card(B)$ esiste una $f: A \to B$ iniettiva

2) $Card(A) \neq Card(B)$ NON esiste una $g: A \to B$ biunivoca

$Card(A) < Card(B)$

$\mathbb{Q} = \{ \frac{n}{d} \}$

Dati due insiemi A e B, si dice PRODOTTO CARTESIANO (e si indica con $A \times B$) l'insieme di tutte e sole le coppie (a, b) tali che $a \in A$ e $b \in B$.

Se A è numerabile e B è numerabile } allora anche $A \times B$ è numerabile

$Card(A \times B) = Card(\mathbb{N})$

$Card(A_1 \times A_2 \times A_3) = Card(\mathbb{N})$

se $A_1, A_2 \text{ e } A_3$ sono numerabili

$Card(\underbrace{A_1 \times A_2}_{B}) = Card(\mathbb{N})$

$\to Card(B \times A_3) = Card(\mathbb{N})$

$Card(A_1 \times \dots \times A_n) = Card(\mathbb{N})$

se $A_1, \dots, A_n$ sono tutti numerabili.

$S = \{$ tutte e sole le stringhe binarie (infinite), che da un certo punto in poi contengono solo '0'. $\}$

$s \in S$

$s = 0110101011100010011101010 \underbrace{000 \dots 0}_{\text{solo '0'}}$

$Card(S) = Card(\mathbb{N})$, S è numerabile.

ultimo '1'

$s \longleftrightarrow n$

$\in S \qquad \in \mathbb{N}$

$\to 1010111 \dots 110$ binario

$= 1 \cdot 2^{23} + 2^{21} + 2^{19} + 2^{18} + 2^{17} + \dots = n$

$F = \{$ tutte e sole le n-uple di numeri naturali $\}$

$(1, 0, 5)$ $(75, 201, 4)$ $(0, 0, 0, 0, 0)$

$(10^{100}, 7, 6, \text{ripetuto 1 milione di volte})$

Introduciamo una CODIFICA

$n \in \mathbb{N}$ $n^* = n+1$ caratteri '1'

esempi di codifica:

$1^* = 11$

$5^* = 111111$

$0^* = 1$

trasformiamolo secondo la codifica

$\to 0, 1^*, 0, 0^*, 0, 5^*, 0 \dots 0 \dots$

$S \ni 0110101111110 \dots 0$

abbiamo costruito un elemento di S, che corrisponde in maniera univoca all'elemento di F con cui siamo partiti.

Abbiamo quindi dimostrato che esiste una funzione

$f: F \to S$ iniettiva

$f_1 \to s_1$

$f_2 \to s_2$

$f_3 \to s_3$

why?

$Card(F) \leq Card(S)$

$=$

$Card(F) \leq Card(\mathbb{N})$

?

F → finito

→ infinito e numerabile ?

$F = \{$ tutte e sole le n-uple $\}$

$(0)\ (1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5) \dots$

$Card(F) = Card(\mathbb{N})$

F è numerabile.

```
while(1)
  print(0);
```

(w, h, i, l, e, (, 1,), p, r, i, n, t, (, 0,), ;)

↕ ASCII

(119, 104, 105, 108, ... , 59)

$p \in PROG \to f \in F$ $\quad Card(F) = Card(\mathbb{N})$

$\longleftrightarrow ?$

$p_1 \neq p_2 \to f_2$

$\to f_1 \neq$

esiste una $f: PROG \to F$ iniettiva.

$Card(PROG) \leq Card(\mathbb{N})$ ← massimale

PROG → finito

→ infinito e numerabile

```
while(1)
  print(0);
```