Computabilità
Appunti_03 (02/12/2022)

Mario Verdicchio
Università degli Studi di Bergamo
Anno Accademico 2022-2023

Insieme non numerabile

- G, l’insieme delle stringhe binarie infinite, non è numerabile
  - si dimostra per assurdo: se G fosse numerabile, i suoi elementi gi potrebbero essere messi in colonna, costruendo così una matrice binaria infinita a destra e in basso
  - si prenda la diagonale principale di questa matrice e si costruisca la stringa binaria infinita g*, complementando tutti i suoi bit
  - g* appartiene a G, quindi è presente nella matrice, su una certa riga
  - il bit di intersezione tra questa riga e la diagonale principale deve essere il complemento di se stesso (perché appartiene contemporaneamente alla diagonale principale e a g*)
  - ASSURDO, quindi è assurdo supporre che G sia numerabile

G

$g_0 = 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \ldots\ldots$

$g_1 = 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \ldots$

$g_2 = 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \ldots$

$g_3 = 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \ldots\ldots$

$\vdots$

bit sulla diagonale:
formano una stringa binaria infinita, $g_K \in G$
Complementiamo $g_K \to \overline{g_K}$
Anche $\overline{g_K} \in G$

$\overline{g_K} = g_{K0}\, g_{K1}\, g_{K2}\, g_{K3} \cdots\cdots g_{KK}$

g_{KK} è il K-esimo bit di g_K
e anche il K-esimo bit di $\overline{g_K}$
g_{KK} vale 0 e 1 contemporaneamente
ASSURDO

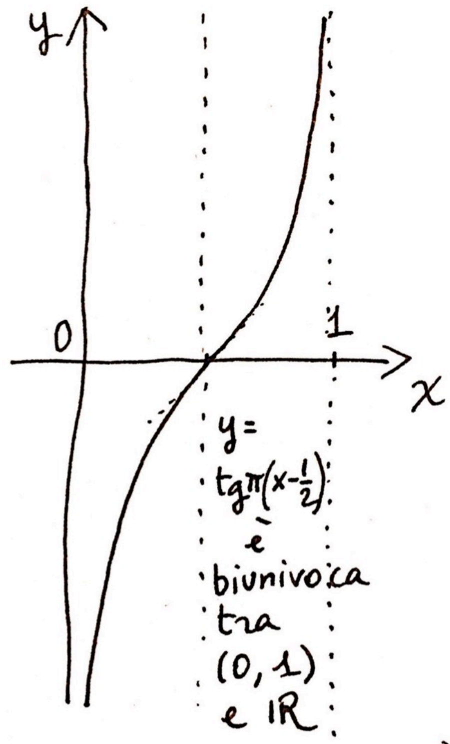
Altri insiemi non numerabili

- Le stringhe binarie infinite di G possono essere messe in corrispondenza biunivoca tramite codifica binaria con tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1, quindi Card(G) = Card((0,1))
- Tramite la funzione $y = \tan(\pi(x-1/2))$ il segmento (0,1) può essere messo in corrispondenza biunivoca con tutto R
- Quindi Card(G) = Card(R)

$$0,\underset{2^{-2}}{1}\,0\,\underset{2^{-4}}{1}\,\underset{2^{-5}}{1}\,\underset{2^{-6}}{1}\,\underset{2^{-7}}{1}\,0\,0\ldots = 0{,}3671875\ldots \in (0,1)$$

$$0\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\ldots \in G$$

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(\{x \in \mathbb{R} \mid x \in (0,1)\})$$



$$\text{Card}((0,1)) = \text{Card}(\mathbb{R})$$

Insieme delle parti

- Dato un insieme A, l'insieme delle parti di A, indicato con P(A) è l'insieme di tutti e soli i suoi sottoinsiemi
- Se A è finito, P(A) contiene $2^{Card(A)}$ elementi
- Ad es. se A={0;1;2}
  P(A) = {{0}; {1}; {2}; {0;1}; {1;2}; {0;2}; {}; {0;1;2}}
- Teorema di Cantor:
  se A è un insieme (finito o infinito),
  Card(A) < Card(P(A))

Dimostrazione

- La tesi è: non esiste una $f:A \rightarrow P(A)$ biiettiva
  Visto che esiste una $f_i:A \rightarrow P(A)$ iniettiva
  ($f_i(a) = \{a\}$, per ogni $a \in A$), la tesi diventa che non esiste una $f:A \rightarrow P(A)$ suriettiva
- Per assurdo: supponiamo esista una f suriettiva, ossia per ogni $A' \subseteq A$,
  esiste un $a' \in A$ tale che $f(a') = A'$
- Ci chiediamo: $a' \in f(a')$?
- Costruiamo $B = \{x \in A: x \notin f(x)\}$
- Essendo f suriettiva, esiste $b \in A$: $f(b) = B$
- Se ci chiediamo $b \in B$? otteniamo un assurdo per entrambe le possibile risposte:
  – Sì:$b \in B$, quindi per come è definito B: $b \notin f(b)$, quindi $b \notin B$ perché $f(b) = B$
  – No:$b \notin B$, quindi $b \notin f(b)$ perché $f(b) = B$, quindi per come è definito B: $b \in B$

Conseguenze

- Una stringa binaria infinita può essere inoltre interpretata come la descrizione esplicita di un sottoinsieme di N (gli ‘0’ corrispondenti a elementi di N che appartengono al sottoinsieme, gli ‘1’ agli elementi che non vi appartengono)
- Ad esempio: {1;4;5} corrisponde a 10110011111111111111111111111111111111111…
- Perciò Card(G) = Card(P(N))
- Visto che Card(G) = Card(R), abbiamo che Card(P(N)) = Card(R)
- Visto il teorema di Cantor: Card(N) < Card(P(N)) ossia Card(N) < Card(R)
- Ipotesi del continuo:
  ∄A: Card(N) < Card(A) < Card(R)