Computabilità
Appunti_02 (30/11/2022)

Mario Verdicchio
Università degli Studi di Bergamo
Anno Accademico 2022-2023

Numerabilità

- Un insieme si dice numerabile quando ha la stessa cardinalità di N
- Esempi di insiemi numerabili: Z (interi), Q (razionali), tutti i sottoinsiemi infiniti di N (numeri pari, numeri dispari, numeri primi…)
- Il prodotto cartesiano (A x B) di due insiemi numerabili è anch'esso numerabile (costruire una tabella e visitarne gli elementi con percorsi diagonali)
- Di conseguenza, il prodotto carstesiano di un numero qualunque di insiemi (A_1 x A_2 x … A_n) è numerabile

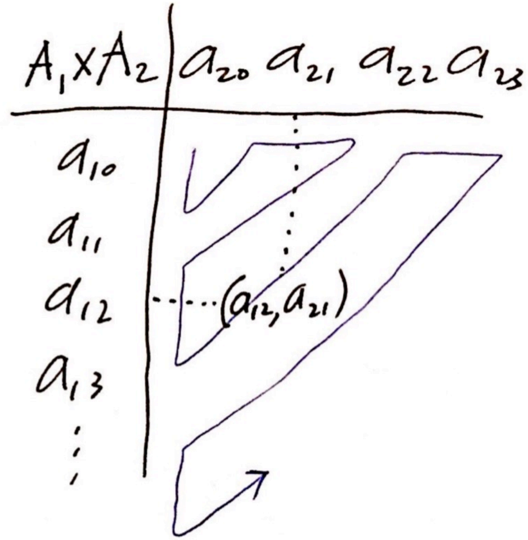
$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \; \ldots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots & & & \\
A: & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & \ldots & & &
\end{array}
$$

Un insieme A è numerabile =

tutti i suoi elementi possono essere messi su una fila

$\mathbb{Z}$: $0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 2 \quad -3 \quad 3 \quad -4 \quad 4 \quad -5 \quad 5 \quad -6 \quad 6 \quad \ldots$

$\mathbb{Q}$	0	1	2	3	4	5	6
-1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
1	0	1	2	3	4	5	6
-2	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{6}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$
-3	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{6}{3}$
3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$
-4	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{6}{4}$
4	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$



$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times \cdots$

Altri insiemi numerabili 1/2

- S, l'insieme delle stringhe binarie infinite che da un certo punto in poi contengono solo '0'
  - lo si dimostra mostrando che la codifica binaria costituisce una corrispondenza biunivoca con i numeri naturali
- F, l'insieme di tutte le n-uple di numeri naturali
  - lo si dimostra con la codifica n^* = (n+1) caratteri '1' facendo corrispondere a ciascun elemento di F $(k_1,\ldots,k_n)$ la stringa $0,k_1^*,0,k_2^*,\ldots,0,k_n^*,0,0\ldots0\ldots$ che appartiene a S

S

$\cup\!\!\!\mid$

ultimo "1"

$s = 1011010010000\ldots000\ldots$

$2^0 \quad 2^2\, 2^3 \quad 2^5 \quad 2^8 \longrightarrow 2^0+2^2+2^3+2^5+2^8 = 301 \in \mathbb{N}$

$f(s) = 301 \quad f^{-1}(301) = s \quad f$ biunivoca

F

$\cup\!\!\!\mid$

$f = (k_1, \ldots, k_n)$

$0\, k_1^*\, 0\, k_2^* \ldots k_n^*\, 0000 \ldots 000 \ldots \in S$

$k_1^* = k_1 + 1$ "1"

esiste funzione INIETTIVA f da F a S

$(f_1 \neq f_2 \xrightarrow[f]{} s_1 \neq s_2)$

quindi $Card(F) \leq Card(S) = Card(\mathbb{N})$

essendo F infinito, allora $Card(F) = Card(\mathbb{N})$

Altri insiemi numerabili 2/2

- Se Σ è l'alfabeto (finito o numerabile) di un linguaggio, le stringhe di questo linguaggio sono n-uple finite di elementi di Σ
- Come nel caso di F, che è costituito da n-uple finite di elementi di N ed è numerabile, così il linguaggio basato su Σ è anch'esso numerabile
- Quindi, l'insieme Prog dei programmi (che non sono altro che n-uple dell'alfabeto) è numerabile

```
while (1)
    print(0);
```

$$\updownarrow$$

(w, h, i, l, e, (, 1,), p, r, i, n, t, (, 0,), ;)

$$\updownarrow$$

$$(119, 104, 105, 108, 101, 40, 49, 41, 112, 114, 105, 110, 116, 40, 48, 41, 59) \in F$$