Algoritmi e Strutture Dati

Cammini minimi

Domenico Fabio Savo

Cammino minimo: definizione

Sia **G=(V,E)** un grafo orientato con funzione di costo **w: E → Real** sugli archi. Il costo **w(π)** di un cammino $\pi = \langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ è dato da:

$$w(\pi) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

Un **cammino minimo** tra una coppia di vertici **x** e **y** è un cammino di costo minore o uguale a quello di ogni altro cammino tra gli stessi vertici.

Proprietà dei cammini minimi (1/3)

Sottostruttura ottima:

Sia **G=(V,E)** un grafo orientato con funzione di costo **w: E → Real** sugli archi e sia π un cammino minimo in **G**. Allora ogni sottocammino di π è esso stesso un cammino minimo in **G**

Proprietà dei cammini minimi (2/3)

Supponiamo che i costi degli archi possano essere negativi e che vi siano in un grafo cicli con costo minore di zero.

Vale la seguente regola:

in un grafo con cicli negativi, se due vertici **x** e **y** appartengono a un ciclo di costo negativo allora non esiste nessun cammino minimo finito tra di essi.

Proprietà dei cammini minimi (3/3)

Se **G** non contiene cicli negativi, tra ogni coppia di vertici connessi in **G** esiste sempre un cammino minimo semplice, in cui cioè tutti i vertici sono distinti

Distanza fra vertici

- La distanza $\mathbf{d_{xy}}$ tra due vertici **x** e **y** è il costo di **un cammino minimo** tra da **x** a **y**, o $+\infty$ se i due vertici non sono connessi:

$$d_{xy} = \begin{cases} w(\pi_{xy}), & \text{Se esiste un cammino tra } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ in } \mathbf{G} \\ +\infty, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Distanza fra vertici (proprietà)

- **Disuguaglianza triangolare**: per ogni **x**, **y** e **z**

$$d_{xz} \leq d_{xy} + d_{yz}$$

- **Condizione di Bellman**: per ogni arco **(u,v)** e per ogni vertice **s**

$$d_{su} + w(u, v) \geq d_{sv}$$

Cammini minimi e distanze

Un arco **(u,v)** appartiene ad un **cammino minimo** a partire da un vertice **s** se e solo se la condizione di Bellman vale con l'uguaglianza, ovvero se **u** è raggiungibile da **s** e $\mathbf{d_{su} + w(u,v) = d_{sv}}$

Calcolare cammini minimi dalle distanze

```
algoritmo cammino(grafo G, distanze d, vertice x, vertice y)
1.    π ← ⟨y⟩;  v ← y
2.    while (v ≠ x) do
3.        for each ( arco (u, v) in G ) do
4.            if (d_xu + w(u, v) = d_xv) then
5.                aggiungi u come primo vertice in π
6.                v ← u
7.                break
8.    return π
```

Albero dei cammini minimi

I cammini minimi da un vertice **s** a tutti gli altri vertici del grafo possono essere rappresentati tramite un albero radicato in **s**. Tale albero è detto **albero dei cammini minimi**

Varianti del problema dei cammini minimi

- Problema dei **cammini minimi fra tutte le coppie**: calcolo delle distanze tra ogni coppia dei vertici nel grafo.
- Problema dei **cammini minimi a sorgente singola**: calcolo delle distanze solo a partire da un dato vertice chiamato **sorgente**
- Problema dei **cammini minimi fra singola coppia**: calcolo della distanza tra due vertici prefissati

Tecnica del rilassamento

Gli algoritmi che vedremo per calcolare le distanze per identificare i cammini minimi partendo da stime $\mathbf{D_{xy}}$ per eccesso delle distanze $\mathbf{d_{xy}}$, ovvero: $\mathbf{D_{xy} \geq d_{xy}}$ e le aggiornano progressivamente decrementandole fino a renderle esatte $\mathbf{(D_{xy} = d_{xy})}$.

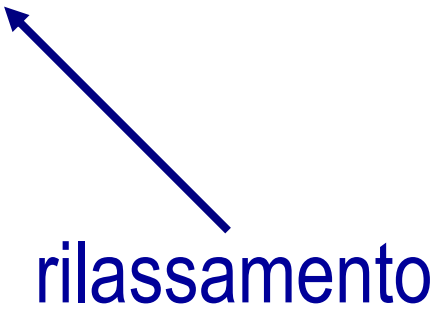
Aggiornamento delle stime basato sul seguente passo di rilassamento:

(RILASSAMENTO) **if** $(D_{xv} + w(\pi_{vy}) < D_{xy})$
then $D_{xy} \leftarrow D_{xv} + w(\pi_{vy})$

Algoritmo generico per il calcolo delle distanze

algoritmo `distanzeGenerico`$(grafo\ G) \rightarrow distanze$
  inizializza D in modo che $D_{xy} \geq d_{xy}$ per ogni coppia di interesse (x, y)
  while (esiste (x, y) fra le coppie di interesse tale che $D_{xy} > d_{xy}$) **do**
    considera un vertice v e un cammino π_{vy}
    if $(D_{xv} + w(\pi_{vy}) < D_{xy})$ **then** $D_{xy} \leftarrow D_{xv} + w(\pi_{vy})$
  return D

Gli algoritmi per il calcolo delle distanze che vedremo differiscono principalmente su come scegliere il vertice **v** ed il cammino $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{vy}}$



Algoritmo di Bellman e Ford

(per cammini minimi a sorgente singola)

Ordine di rilassamento

Sia $\pi =< s, v_1, v_2, \ldots, v_k >$ un cammino minimo. Se fossimo in grado di eseguire i passi di rilassamento nell'ordine seguente:

$$
\begin{array}{lllll}
1. & D_{sv_1} & \leftarrow & D_{ss} & + & w(s, v_1) \\
2. & D_{sv_2} & \leftarrow & D_{sv_1} & + & w(v_1, v_2) \\
3. & D_{sv_3} & \leftarrow & D_{sv_2} & + & w(v_2, v_3) \\
\vdots & \vdots & & & & \\
k. & D_{sv_k} & \leftarrow & D_{sv_{k-1}} & + & w(v_{k-1}, v_k)
\end{array}
$$

in **k** passi avremmo la soluzione. Purtroppo non conosciamo l'ordine giusto, essendo **π** ignoto

Approccio di Bellman e Ford

- L'algoritmo di Bellman e Ford si basa sulla seguente idea:
  - Effettuando una prima passata "rilassando" tutti gli archi di G, otteniamo sicuramente $\mathbf{D_{sv1} = d_{sv1}}$
  - Ripetendo la passata su tutti gli archi otterremo $\mathbf{D_{sv2} = d_{sv2}}$
  - Con **n** passate arriveremo ad avere tutte le distanze

Pseudocodice

algoritmo `BellmanFord`$(grafo\ G, vertice\ s) \rightarrow distanze$
    inizializza D tale che $D_{sv} = +\infty$ per $v \neq s$, e $D_{ss} = 0$
    for $i = 1$ **to** n **do**
        for each $((u, v) \in E)$ **do**
            if $(D_{su} + w(u, v) < D_{sv})$ **then** $D_{sv} \leftarrow D_{su} + w(u, v)$
    return D

Approccio di Bellman e Ford

- L'algoritmo cicla per **n** volte, dove n è il numero di vertici del grafo **G**.
- In ogni ciclo effettua il rilassamento di tutti gli **m** archi.

Tempo di esecuzione: **O(nm)**

- Dopo la j-esima passata, i primi j rilassamenti corretti sono stati certamente eseguiti.
- Esegue però molti rilassamenti inutili!

Algoritmo per grafi diretti aciclici
(per cammini minimi a sorgente singola)

Algoritmo per grafi diretti aciclici

- L'algoritmo di Bellman e Ford esegue un grande numero di operazioni di rilassamento inutili.
- Eseguire i passi di rilassamento del giusto ordine è cruciale per evitare di fare operazioni inutili.
- Il prossimo algoritmo sfrutterà alcune proprietà del grafo in modo da rilassare ciascun arco esattamente una volta.

Ordinamento topologico (1/2)

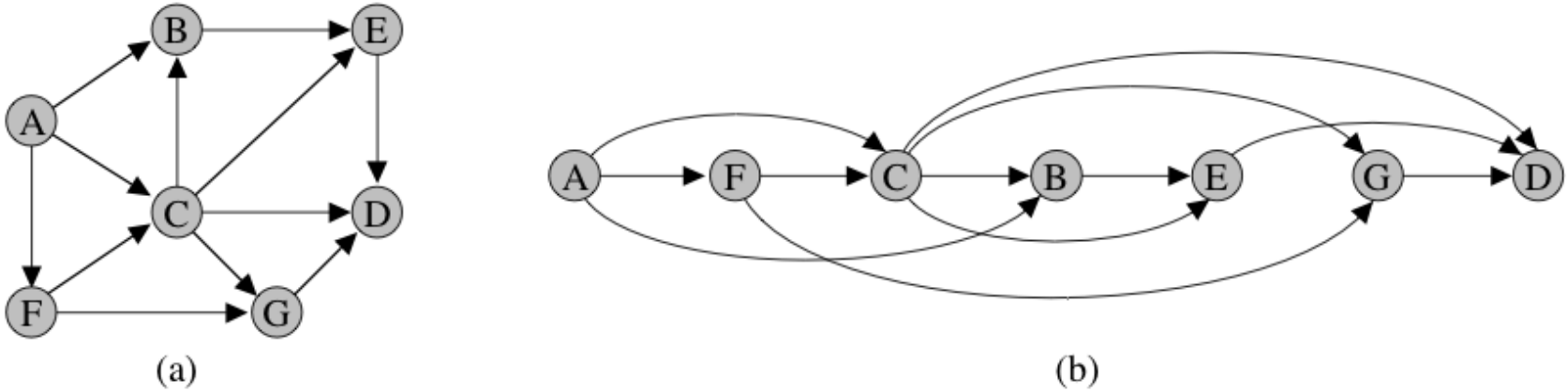
In un grafo aciclico, se esiste un cammino da **u** a **v** allora **non esiste** un cammino da **v** ad **u.** Questo ci permette di definire un ordinamento dei vertici, tale che **u** precede **v** nell'ordinamento se esiste un cammino da **u** a **v**.

Tale ordinamento è detto **ordinamento topologico**

Ordinamento topologico (2/2)

Funzione $\sigma: V \rightarrow \{1, \ldots n\}$ tale che $\sigma(u) < \sigma(v)$ se esiste un cammino da u a v in G

L'ordinamento topologico non è sempre unico.



(a) Esempio di grafo aciclico; (b) Ordinamento topologico del grafo (a).

Calcolo di un ordinamento topologico (1/2)

IDEA:

1. scelgo un nodo **u** senza archi entranti, lo cancello dal grafo e pongo *ord*(**u**) = **1**.
2. Ripeto il ragionamento: scelgo un altro vertice **v** senza archi entranti, lo cancello dal grafo e pongo *ord*(**v**) = **2**
3. Ripeto finché non ho eliminato tutti i nodi

Calcolo di un ordinamento topologico (2/2)

algoritmo `ordinamentoTopologico`$(grafo\ G) \rightarrow lista$

$\widehat{G} \leftarrow G$

$ord \leftarrow$ lista vuota di vertici

while (esiste un vertice u senza archi entranti in $\widehat{G}$) **do**

appendi u come ultimo elemento di ord

rimuovi da $\widehat{G}$ il vertice u e tutti i suoi archi uscenti

if ($\widehat{G}$ non è diventato vuoto) **then errore** il grafo G non è aciclico

return ord

Tempo di esecuzione: **O(n+m)**

Cammini minimi in grafi aciclici: idea

Il prossimo algoritmo è una variante dell'algoritmo di Bellman e Ford per soli grafi aciclici in cui le operazioni di rilassamento vengono effettuate secondo un ordinamento topologico:

Vengono prima rilassati tutti gli archi **(u,v)** con ***ord(*u) = 1** nell'ordinamento topologico ***ord***, poi quelli con ***ord*(u) = 2** e cosi via.

In questo modo si evita di effettuare rilassamenti inutili: ogni arco viene rilassato esattamente una volta.

Cammini minimi in grafi aciclici: pseudocodice

algoritmo `distanzeAciclico`$(grafo\ G, vertice\ s) \rightarrow distanze$
  inizializza D tale che $D_{sv} = +\infty$ per $v \neq s$, e $D_{ss} = 0$
  $ord \leftarrow$ `ordinamentoTopologico`(G)
  for $i = 1$ **to** n **do**
    sia u l'i-esimo vertice nell'ordinamento topologico ord
    for each $((u, v) \in E)$ **do**
      if $(D_{su} + w(u, v) < D_{sv})$ **then** $D_{sv} \leftarrow D_{su} + w(u, v)$
  return D

Tempo di esecuzione: **O(n+m)**

Algoritmo di Dijkstra

(per cammini minimi a sorgente singola in grafi con costi non negativi)

Estendere l'albero dei cammini minimi

Negli anni '50 E.W. Dijkstra scoprì la seguente proprietà:

> Se **T** è un albero dei cammini minimi radicato in **s** che non include tutti i vertici raggiungibili da **s**, l'arco **(u,v)** tale che $\mathbf{u \in T}$ e $\mathbf{v \notin T}$ che minimizza la quantità $\mathbf{d_{su}+w(u,v)}$ appartiene a un cammino minimo da **s** a **v**

Tale proprietà ci fornisce un semplice metodo per costruire un albero dei cammini minimi che include tutti i vertici raggiungibili da **s**

Approccio di Dijkstra

IDEA:

Applichiamo il seguente passo fino alla costruzione dell'albero **T:**

Scegli un arco **(u,v)** con $\mathbf{u \in T}$ e $\mathbf{v \notin T}$ che minimizza la quantità $\mathbf{D_{su}+w(u,v)}$, effettua il passo di rilassamento $\mathbf{D_{sv} \leftarrow D_{su}+w(u,v)}$, ed aggiungilo a **T**

Pseudocodice

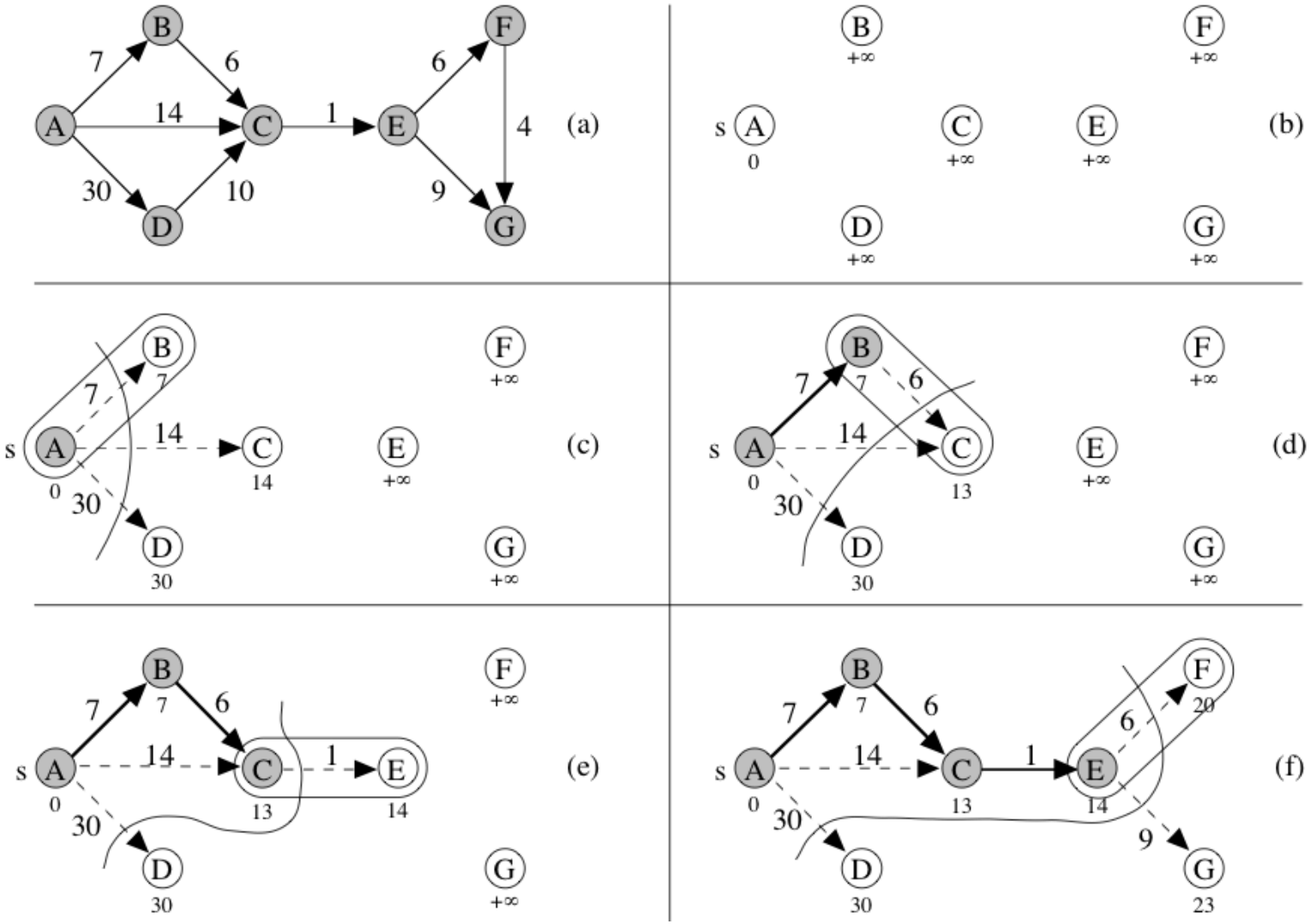
algoritmo `DijkstraGenerico`$(grafo\ G, vertice\ s) \rightarrow albero$

1. inizializza D tale che $D_{sv} = +\infty$ per $v \neq s$, e $D_{ss} = 0$
2. $T \leftarrow$ albero formato dal solo nodo s
3. **while** (T ha meno di n nodi) **do**
4. trova l'arco (u, v) incidente su T con $D_{su} + w(u, v)$ minimo
5. $D_{sv} \leftarrow D_{su} + w(u, v)$ {rilassamento}
6. rendi u padre di v in T
7. **return** T

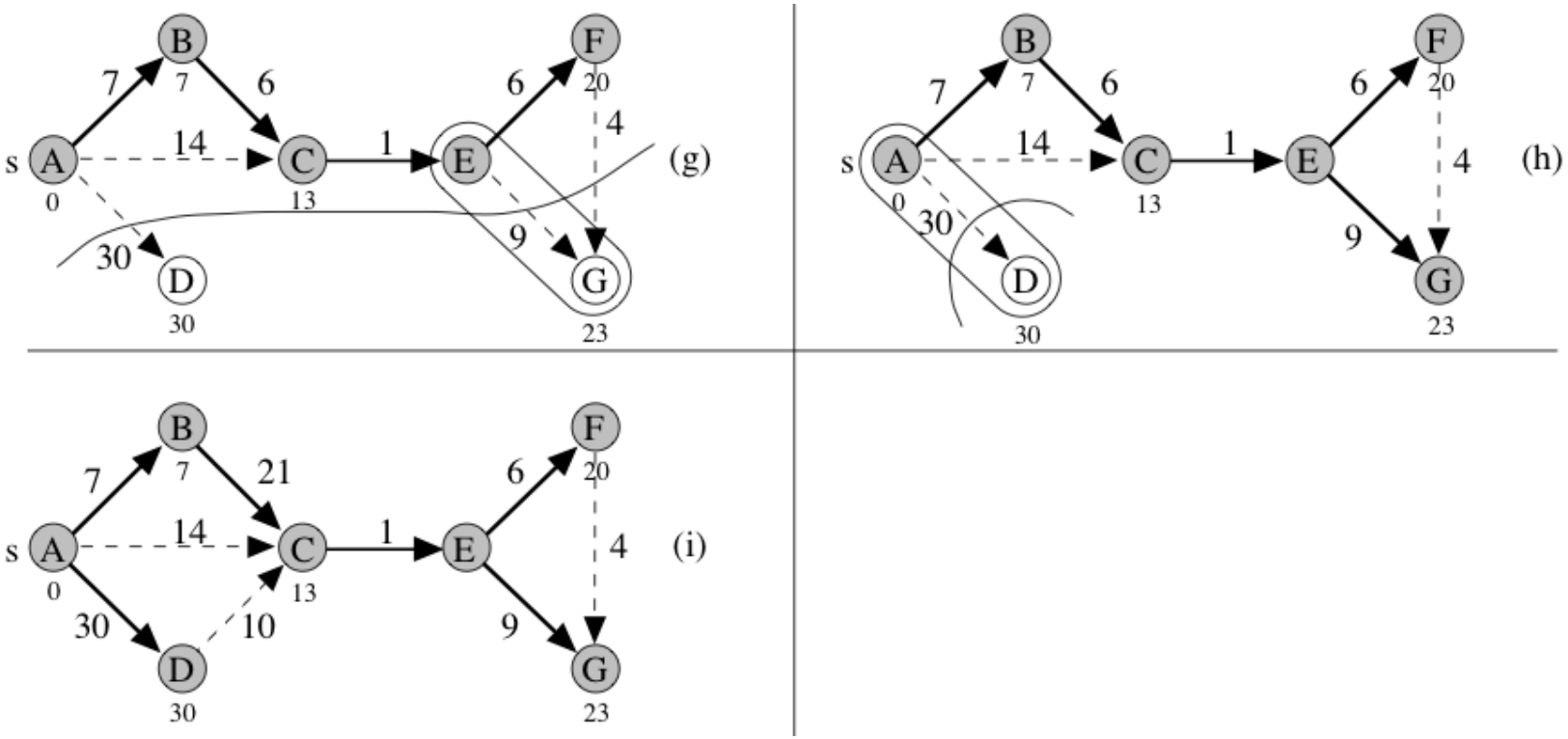
Si noti la somiglianza con l'algoritmo di Prim per il calcolo di un minimo albero ricoprente: come l'algoritmo di Prim anche l'algoritmo di Dijkstra si basa sulla tecnica *golosa*.

È possibile realizzare una versione dell'algoritmo che calcola ***T*** *in* ***O(m + n log n)***

Esempio (1/2)


B
F
7
6
6
A
14
C
1
E
4
(a)
30
10
9
D
G
B
F
+∞
+∞
s
A
C
E
(b)
0
+∞
+∞
D
G
+∞
+∞
B
F
7
7
+∞
s
A
14
C
E
(c)
0
14
+∞
30
D
G
30
+∞
B
F
7
7
6
+∞
s
A
14
C
E
(d)
0
13
+∞
30
D
G
30
+∞
B
F
7
7
6
+∞
s
A
14
C
1
E
(e)
0
13
14
30
D
G
30
+∞
B
F
20
7
7
6
6
s
A
14
C
1
E
(f)
0
13
14
30
9
D
G
30
23

Esempio (2/2)



Riepilogo

- Algoritmi classici per il calcolo di distanze (e quindi di cammini minimi), basati sulla tecnica del rilassamento:
  - Bellman e Ford: cammini minimi a sorgente singola, grafi diretti senza cicli negativi, tempo O(nm)
  - Grafi diretti aciclici: cammini minimi a sorgente singola in tempo O(n+m)
  - Dijkstra: cammini minimi a sorgente singola, grafi diretti senza pesi negativi, tempo O(m+n log n)