Algoritmi e Strutture Dati

Grafi e visite di grafi

Domenico Fabio Savo

Grafo: definizione

Un grafo **G=(V,E)** consiste in:

- un insieme **V** di vertici (o nodi)
- un insieme **E** di coppie di vertici, detti **archi** o spigoli: ogni arco connette due vertici

Grafo orientato

Grafo orientato (o diretto): ogni arco è *orientato* e rappresenta relazioni *orientate* tra coppie di oggetti

Esempio:

V={persone che vivono in Italia},

E={(x,y) tale che x ha inviato una mail a y}

Esempio:

V={persone che vivono in Italia},

E={(x,y) tale che x è padre di y}

Grafo non orientato

Grafo non orientato (o non diretto): gli archi non hanno un orientazione (relazioni simmetriche)

Esempio:

V={persone che vivono in Italia},
E={coppie di persone che si sono strette la mano}

Esempio:

V={persone che vivono in Italia},
E={coppie di fratelli}

Terminologia

relazione **simmetrica** →grafo **non orientato**

relazione **non simmetrica** → grafo **orientato**

Sia **G** un grafo. Denotiamo con:

- **n** il numero di vertici di **G**
- **m** il numero di archi di **G**
- **V(G)** l'insieme dei nodi di **G**
- **E(G)** l'insieme degli archi di **G**

- Quindi: **|V(G)| = n** e **|E(G)| = m**

Adiacenza ed Incidenza

- Sia **(x,y)** un arco del grafo **G**, diciamo che **(x,y)** è **incidente** sui nodi **x** e **y**;
- Se **G** è un grafo *orientato*, allora diciamo che **(x,y)** **esce** da **x** ed **entra** in **y**;
- Se **G** è un grafo *non orientato* allora diremo che **x** è **adiacente** ad **y** e che **y** è **adiacente** a **x**, ovvero **x** ed **y** sono **adiacenti**;
- Dato un nodo **v** chiameremo i nodi adiacenti a **v** i **vicini** di **v**

Grado di un vertice (1/2)

- Il **grado** di un vertice **v** in un grafo è dato dal numero di archi **incidenti** su **v.**
- Denotiamo con $\delta(v)$ il grado del vertice **v.**
- Se sommiamo il grado di tutti i nodi di un grafo **G** *non orientato*, andiamo a contare ogni arco **2** volte (es: (x,y) una volta per x ed una volta per y).
- Quindi: $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m$

Grado di un vertice (2/2)

Se il grafo G è *orientato,* parleremo di:

- ***Grado in uscita*** di **v**, intendendo con questo il numero di archi che escono da **v** e lo indicheremo con $\delta_{out}(v)$
- ***Grado in entrata*** di **v**, intendendo con questo il numero di archi che ertano in **v** e lo indicheremo con $\delta_{in}(v)$
- Il ***grado*** di un vertice sarà dato dalla somma dei due:

$$\delta(v) = \delta_{in}(v) + \delta_{out}(v)$$

Cammini

Un cammino in un grafo **G** da un vertice **x** ad un vertice **y** è dato da una sequenza di vertici $[v_0, v_1, \ldots, v_k]$ con $v_0 = x$ e $v_k = y$. Tale che per ogni $1 \leq i \leq k$, l'arco (v_{i-1}, v_i) appartiene a **V(G)**.

In tal caso diremo che il cammino è di **lunghezza k.**
La lunghezza del più **corto cammino** tra due vertici si dice **distanza**.

Diremo che un cammino è ***semplice*** se tutti i suoi vertici sono distinti.

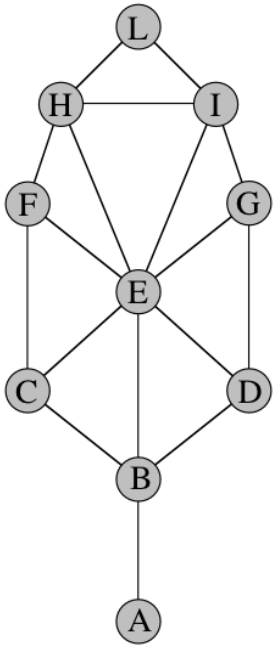
Nel caso di grafi orientati indichiamo il cammino da **x** a **y** con **x → y**

Se esiste un cammino da **x** ad **y** diremo che **y** è **raggiungibile** da **x**

Cicli

- Un cammino $[v_0, v_1, \ldots, v_k]$ tale che $v_0 = v_k$, con $k \geq 1$, è detto ***ciclo***
- Il ciclo è detto **semplice** se tutti i nodi $v_1, \ldots, v_{k-1}$ sono distinti.
- Un grafo *diretto* è detto ***aciclico*** se **non** contiene cicli.

Esempio



Il grafo in figura è un grafo **non** orientato

Il vertice **H** ha grado 4: $\delta(v) = 4$

Esiste un cammino semplice di lunghezza 4 tra il vertice **A** ed il vertice **L**, contenente i vertici **A, B, E, I, L** e gli archi **(A,B), (B,E), (E,I),** ed **(I,L)**

Dato che 4 è anche la lunghezza del cammino più corto tra **A** ed **L**, allora **A** ed **L** sono a ***distanza*** **4**.

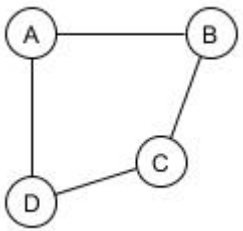
Connettività e connettività forte

- Un grafo *non orientato* **G = (V, E)** si dice ***connesso*** se esiste un cammino tra ogni coppia di vertici in **G**.
- Un grafo *orientato* **G = (V, E)** si dice ***fortemente connesso*** se esiste un cammino (orientato) tra ogni coppia di vertici in **G**.
- Diremo che un vertice **x** è ***fortemente connesso*** ad un vertice **y** se esiste un cammino (orientato) da **x** ad **y** ed un cammino (orientato) da **y** a **x.**

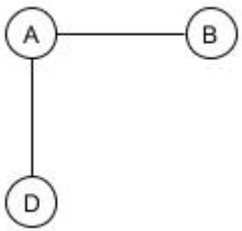
Sottografi

- Diciamo che un grafo **G' = (V', E')** è un ***sottografo*** di un grafo **G = (V, E)** se **V' ⊆ V** e **E' ⊆ E**.
  In questo caso useremo la notazione **G' ⊆ G**.

- Dato un grafo **G = (V, E)** ed un insieme di vertici **V' ⊆ V**, il ***sottografo*** di **G** ***indotto*** da **V'** è definito come il grafo **G' = (V', E')** dove **E' = { (x,y) ∈ E tale che x,y ∈ V' }.**



G



G'

G' è il sottografo di G indotto da V' = {A, B, D}

Strutture dati
per rappresentare grafi

Operazioni sui grafi

tipo `Grafo`:
dati:
un insieme di vertici (di tipo *vertice*) e un insieme di archi (di tipo *arco*).

operazioni:

`numVertici`() → *intero*
restituisce il numero di vertici presenti nel grafo.

`numArchi`() → *intero*
restituisce il numero di archi presenti nel grafo.

`grado`(*vertice* v) → *intero*
restituisce il numero di archi incidenti sul vertice v.

`archiIncidenti`(*vertice* v) → $\langle arco, arco, \ldots, arco \rangle$
restituisce, uno dopo l'altro, gli archi incidenti sul vertice v.

`estremi`(*arco* e) → $\langle vertice, vertice \rangle$
restituisce gli estremi x e y dell'arco $e = (x, y)$.

`opposto`(*vertice* x, *arco* e) → *vertice*
restituisce y, l'estremo dell'arco $e = (x, y)$ diverso da x.

`sonoAdiacenti`(*vertice* x, *vertice* y) → *booleano*
restituisce `true` se esiste l'arco (x, y), e `false` altrimenti

`aggiungiVertice`(*vertice* v)
inserisce un nuovo vertice v.

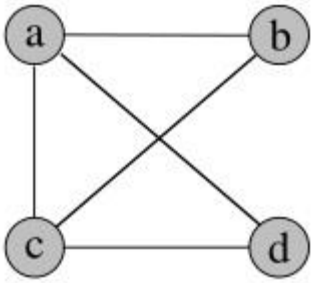
`aggiungiArco`(*vertice* x, *vertice* y)
inserisce un nuovo arco tra i vertici x e y.

`rimuoviVertice`(*vertice* v)
cancella il vertice v e tutti gli archi ad esso incidenti.

`rimuoviArco`(*arco* e)
cancella l'arco e.

A titolo di esempio consideriamo le seguenti operazioni su grafi non orientati

Lista di archi



(a,b)
(c,a)
(b,c)
(c,d)
(a,d)

I vertici del grafo sono rappresentati come record in una lista. Ogni record contiene le informazioni che si voglio associare al nodo (Es. etichetta)

Gli archi del grafo sono rappresentati come record di una lista. Ogni record contiene i puntatori ai vertici che sono gli estremi dell'arco

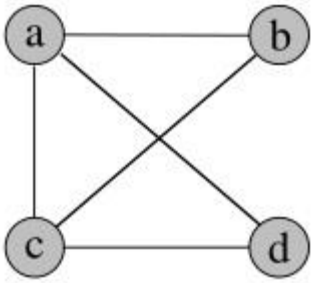
Lo spazio utilizzato sarà O(n+m)

Rappresentazione poco efficiente → molte operazioni richiedono i scandire l'intera lista degli archi.

Prestazioni della lista di archi

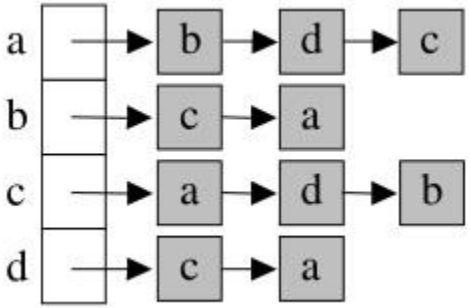
Operazione	Tempo di esecuzione
`grado`(v)	$O(m)$
`archiIncidenti`(v)	$O(m)$
`sonoAdiacenti`(x, y)	$O(m)$
`aggiungiVertice`(v)	$O(1)$
`aggiungiArco`(x, y)	$O(1)$
`rimuoviVertice`(v)	$O(m)$
`rimuoviArco`(e)	$O(m)$

Liste di adiacenza



Ogni vertice **v** ha una lista contenente i suoi vertici adiacenti, ovvero tutti i vertici **u** per cui esiste un arco **(v,u)**.

Vi saranno **n** liste, una per ogni vertice.
Lo spazio utilizzato sarà O(n+m)



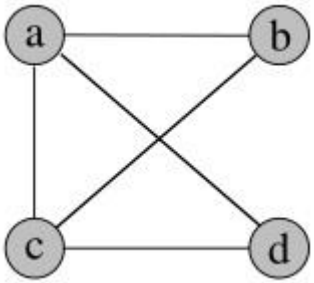
Efficiente per quelle operazioni in cui si chiede di visitare un grafo esaminando gli archi incidenti sui vertici.

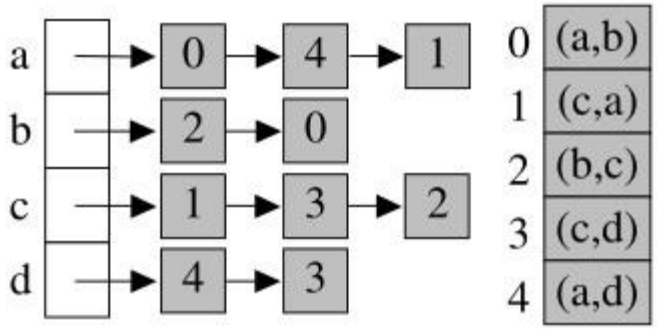
Contro: per sapere se due nodi sono adiacenti devo scandire tutta la lista di adiacenza.

Prestazioni delle liste di adiacenza

Operazione	Tempo di esecuzione
`grado`(v)	$O(\delta(v))$
`archiIncidenti`(v)	$O(\delta(v))$
`sonoAdiacenti`(x, y)	$O(\min\{\delta(x), \delta(y)\})$
`aggiungiVertice`(v)	$O(1)$
`aggiungiArco`(x, y)	$O(1)$
`rimuoviVertice`(v)	$O(m)$
`rimuoviArco`$(e = (x, y))$	$O(\delta(x) + \delta(y))$

Liste di incidenza





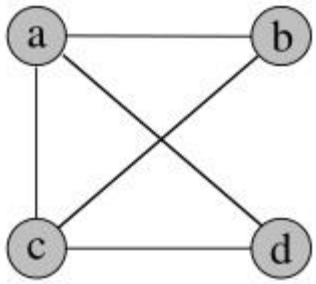
Combinazione tra la rappresentazione con liste di archi e liste di adiacenza: in aggiunta alla rappresentazione con lista di archi, memorizziamo per ogni vertice **v** una lista di puntatori agli archi incidenti a **v.**

Lo spazio utilizzato sarà leggermente maggiore, ma comunque nell'ordine di O(n+m)

Prestazioni della lista di incidenza

Operazione	Tempo di esecuzione
`grado`(v)	$O(\delta(v))$
`archiIncidenti`(v)	$O(\delta(v))$
`sonoAdiacenti`(x, y)	$O(\min\{\delta(x), \delta(y)\})$
`aggiungiVertice`(v)	$O(1)$
`aggiungiArco`(x, y)	$O(1)$
`rimuoviVertice`(v)	$O(m)$
`rimuoviArco`$(e = (x, y))$	$O(\delta(x) + \delta(y))$

Matrici di adiacenza



	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	1	0	1	0

Assumiamo che i vertici del grafo corrispondano a numeri interi da 1 ad n.

Sia **M** una matrice **n×n** le cui righe e colonne sono "indicizzate" dai vertici del grafo. Avremo:

$$M[u,v] = \begin{cases} 1 \text{ se } (u,v) \text{ è un arco di } G \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

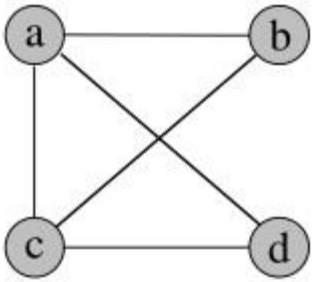
Utilizziamo molto spazio (matrice **n×n**) però possiamo verificare la presenza di un arco (u,v) in tempo contante.

Utile se si voglio adottare tecniche basate su calcoli algebrici (ES: prodotto tra matrici)

Prestazioni della matrice di adiacenza

Operazione	Tempo di esecuzione
`grado`(v)	$O(n)$
`archiIncidenti`(v)	$O(n)$
`sonoAdiacenti`(x, y)	$O(1)$
`aggiungiVertice`(v)	$O(n^2)$
`aggiungiArco`(x, y)	$O(1)$
`rimuoviVertice`(v)	$O(n^2)$
`rimuoviArco`(e)	$O(1)$

Matrici di incidenza



	(a,b)	(c,a)	(b,c)	(c,d)	(a,d)
a	1	1	0	0	1
b	1	0	1	0	0
c	0	1	1	1	0
d	0	0	0	1	1

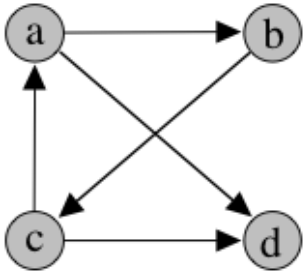
La matrice di incidenza è una matrice **n**×**m** le cui righe sono "indicizzate" dai vertici e le colonne sono "indicizzate" dagli archi. La posizione **M[v,e]** sarà uguale ad **1** se l'arco **e** incide sul vertice **v**.

- ogni colonna ha esattamente due 1: la colonna corrispondente all'arco **(x,y)** avrà un 1 nella riga corrispondente ad **x** ed un 1 nella riga corrispondente ad **y**

Prestazioni della matrice di incidenza

Operazione	Tempo di esecuzione
`grado`(v)	$O(m)$
`archiIncidenti`(v)	$O(m)$
`sonoAdiacenti`(x, y)	$O(m)$
`aggiungiVertice`(v)	$O(nm)$
`aggiungiArco`(x, y)	$O(nm)$
`rimuoviVertice`(v)	$O(nm)$
`rimuoviArco`(e)	$O(n)$

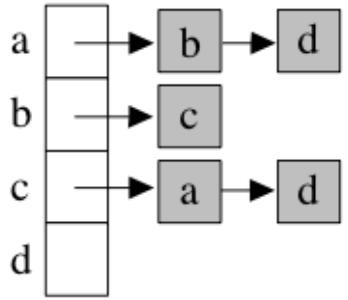
Rappresentazione di grafi orientati



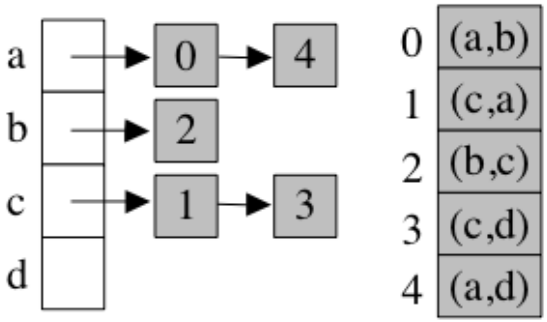
(a) Grafo orientato G

(a,b)
(c,a)
(b,c)
(c,d)
(a,d)

(b) Lista di archi di G



(c) Liste di adiacenza di G



(d) Liste di incidenza di G

	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	0	1	0
c	1	0	0	1
d	0	0	0	0

(e) Matrice di adiacenza di G

	(a,b)	(c,a)	(b,c)	(c,d)	(a,d)
a	1	-1	0	0	1
b	-1	0	1	0	0
c	0	1	-1	1	0
d	0	0	0	-1	-1

(f) Matrice di incidenza di G

Visite di grafi

Scopo e tipi di visita

- Una visita (o attraversamento) di un grafo G permette di esaminare i nodi e gli archi di G in modo sistematico
- Problema di base in molte applicazioni
- Esistono vari tipi di visite con diverse proprietà: in particolare:
  - **visita in ampiezza** (BFS=breadth first search)
  - **visita in profondità** (DFS=depth first search)
- Definiamo prima un algoritmo di visita "*generico*".

Algoritmo di visita generica

Assumiamo che ogni nodo di **G** sia raggiungibile da **s**

```
algoritmo visitaGenerica(vertice s) → albero
1.    rendi tutti i vertici non marcati
2.    T ← albero formato da un solo nodo s
3.    F ← insieme vuoto di vertici
4.    marca il vertice s e aggiungi s a F
5.    while (F ≠ ∅) do
6.        estrai un qualsiasi vertice u da F
7.        visita il vertice u
8.        for each ( arco (u, v) in G ) do
9.            if ( v non è ancora marcato ) then
10.               marca il vertice v e aggiungi v a F
11.               rendi u padre di v in T
12.           else eventualmente rendi u nuovo padre di v in T
13.   return T
```

Osservazioni

- Un vertice viene marcato quando viene incontrato per la prima volta.
- L'algoritmo genera una sottografo T di G i cui archi formano un albero radicato in s. Tale albero è detto *albero di copertura.*
- L'insieme di vertici F è detto "frangia". Avremo che:
  - Se **v∈ T – F**: allora diciamo che **v** è ***chiuso***, i.e. tutti gli archi incidenti su **v** sono stati esaminati.
  - Se **v∈ F**: allora **v** è detto ***aperto***, i.e. esistono archi incidenti su v non ancora esaminati.
  - Se **v∈ V – T**: allora v è detto ***inesplorato.***

Costo della visita

Il tempo di esecuzione dipende dalla struttura dati usata per rappresentare il grafo.

In particolare, la visita di un grafo G = (V,E) con **n** vertici e **m** archi consterà:

- **O(mn)** se il grafo è rappresentato come una **lista di archi**
- **O(m+n)** se il grafo è rappresentato come una **lista di adiacenza o di incidenza**
- **O(n^2)** se il grafo è rappresentato come una **matrice di adiacenza**

La rappresentazione mediante lista di adiacenza (o incidenza) è quindi la più efficiente rispetto alla visita di una grafo

Visite particolari

- Se la frangia F è implementata come **coda** si ha la visita in ampiezza (BFS)
- Se la frangia F è implementata come **pila** si ha la visita in profondità (DFS)

Visita in ampiezza

Visita in ampiezza

Sia G = (V,E) un grafo non orientato. Una **visita in ampiezza** di G esamina i nodi in un ordine ben definito, generando un albero di copertura **T** che chiameremo albero BFS (breadth first search).

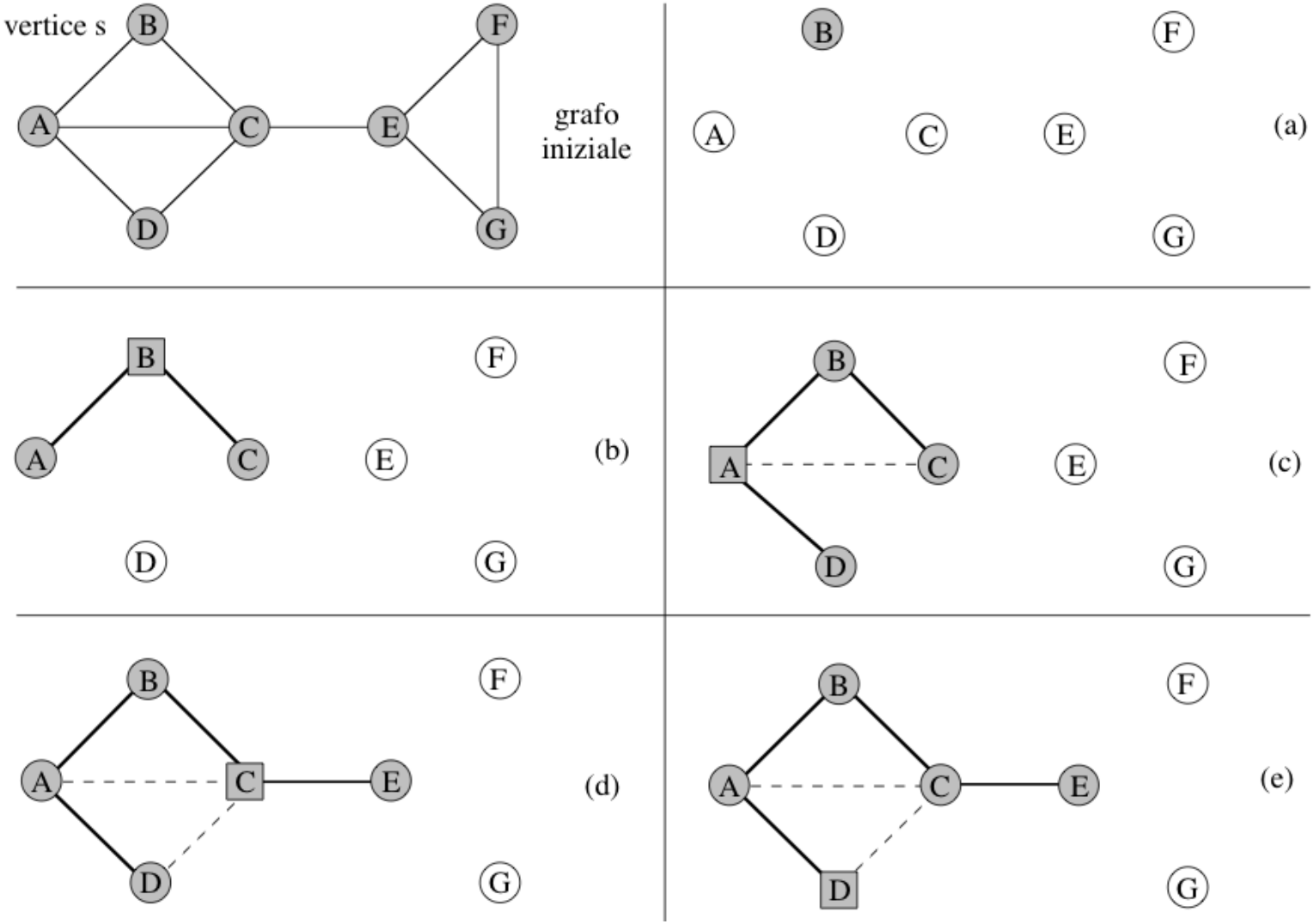
La visita procede per ampiezza sul grafo a partire dai vertici incontrati. Nell'**albero BFS T** generato dalla visita, ogni vertice si trova il più vicino possibile alla radice **s** dell'albero **T**.

Se la frangia F è implementata come una **coda** (politica di accesso FIFO).

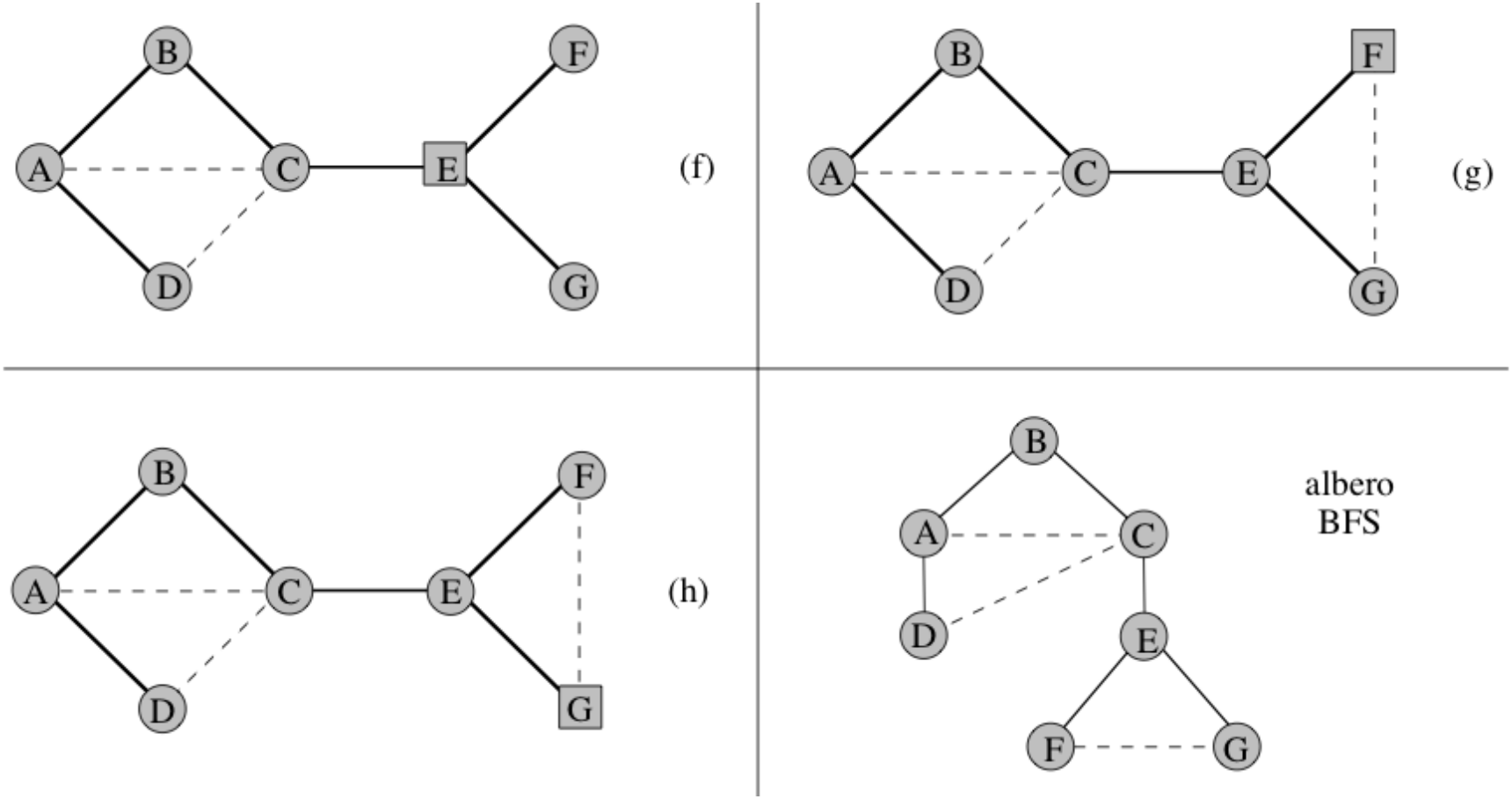
Visita in ampiezza: algoritmo

```
algoritmo visitaBFS(vertice s) → albero
1.    rendi tutti i vertici non marcati
2.    T ← albero formato da un solo nodo s
3.    Coda F
4.    marca il vertice s
5.    F.enqueue(s)
6.    while ( not F.isempty() ) do
7.        u ← F.dequeue()
8.        for each ( arco (u, v) in G ) do
9.            if ( v non è ancora marcato ) then
10.               F.enqueue(v)
11.               marca il vertice v
12.               rendi u padre di v in T
13.   return T
```

Esempio: grafo non orientato (1/2)



Esempio: grafo non orientato (2/2)



Visita in ampiezza: proprietà

La visita in ampiezza di un grafo **G = (V,E)** gode delle seguenti proprietà:

- Per ogni nodo **v**, il livello di **v** nell'albero BFS è pari alla distanza di **v** dalla sorgente **s**
- Per ogni arco **(u,v)** di un grafo non orientato, gli estremi **u** e **v** appartengono allo *stesso livello* o a *livelli consecutivi* dell'albero BFS

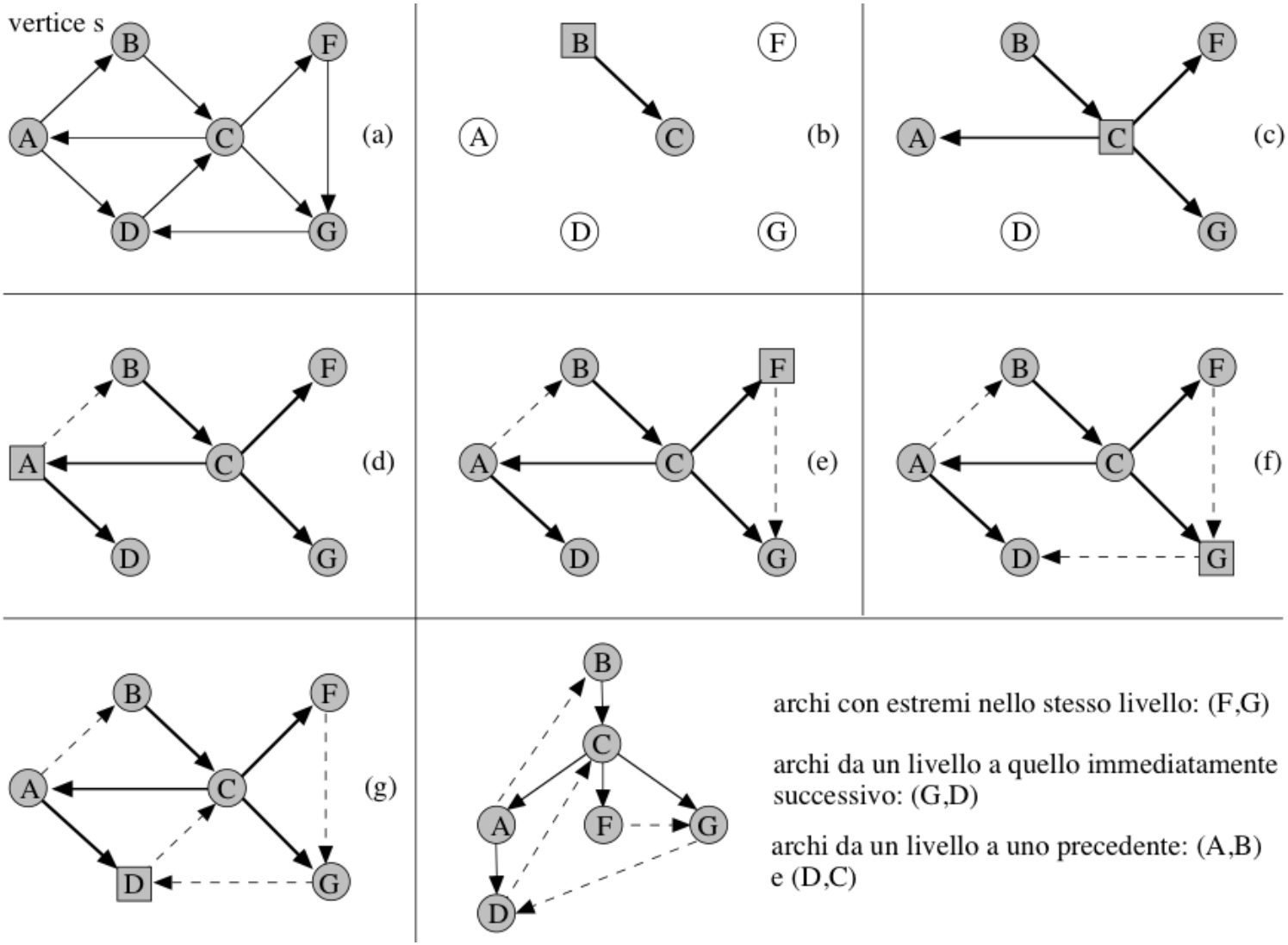
Visita in ampiezza: grafi orientati

La visita in ampiezza può essere applicata anche ai grafi orientati.

Nell'operazione di scelta dei vicini di un vertice **v** (implementata nel passo 8 dell'algoritmo) si dovranno scegliere **solo** gli archi **(v, w)** *uscenti* da **v**

Rispetto all'albero BFS **T** definito dalla visita, potranno esistere archi **(u,v)** in **G** che attraversano all'indietro più di un livello di **T**

Esempio: grafo orientato



Visita in profondità

Visita in profondità

Sia G = (V,E) un grafo non orientato. Una **visita in profondità** di G, a partire da un nodo assegnato **s**, esamina i nodi in un ordine ben definito, generando un albero di copertura **T** che chiameremo albero DFS (depth first search).

La visita procede in profondità sul grafo a partire dai vertici incontrati.

Se la frangia **F** è implementata come una **pila** (politica di accesso LIFO).

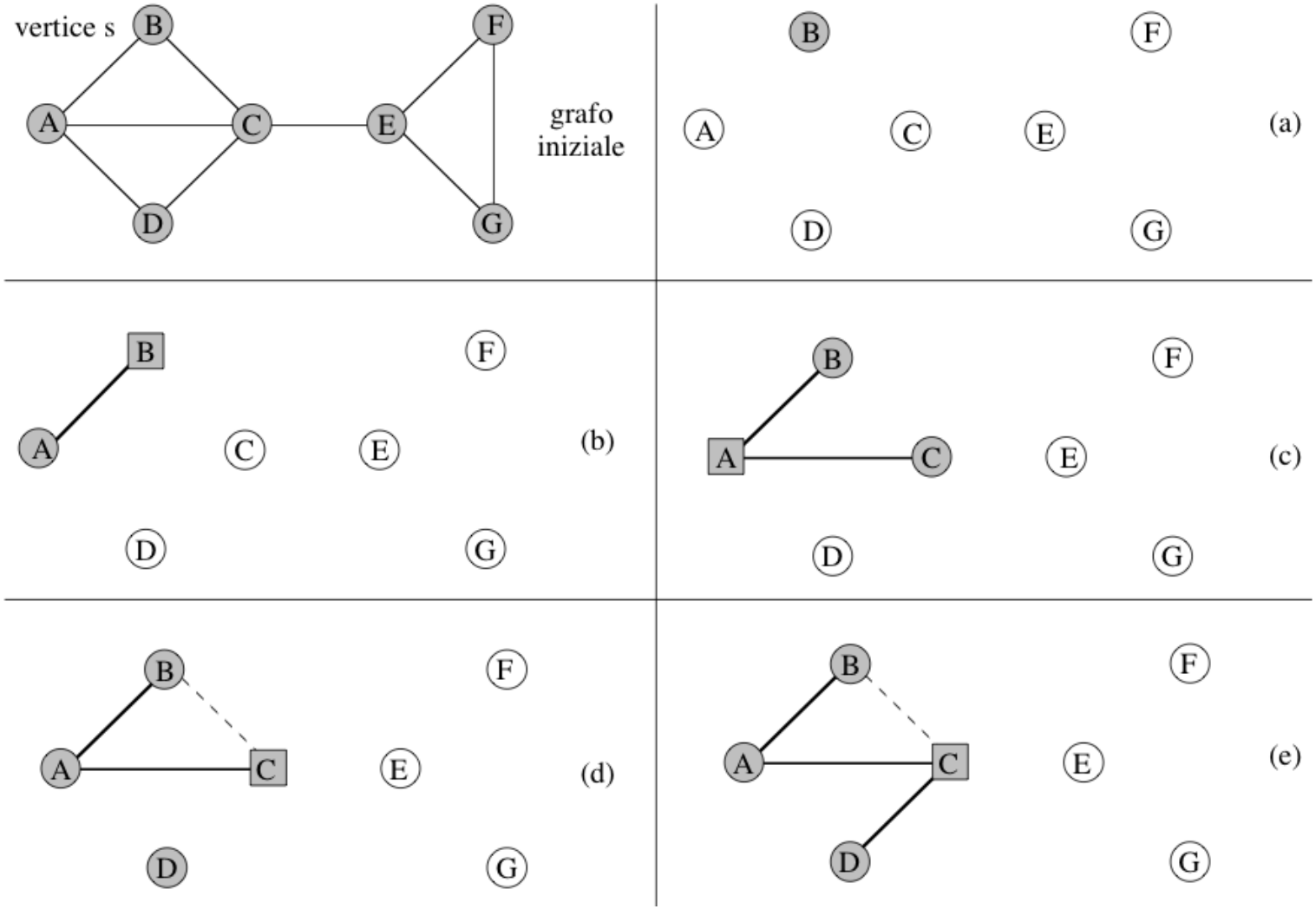
Visita in profondità

```
algoritmo visitaDFS(vertice s) → albero
1.      marca tutti i vertici come inesplorati;
2.      marca il vertice s come scoperto;
3.      T ← albero formato dal solo vertice s;
4.      pila F;
5.      F.push(s);
6.      while (not F.isEmpty()) do
7.              u ← F.pop();
8.              if(u è esplorato) then continue;
9.              marca u come esplorato;
10.             visita il vertice u;
11.             for each ( arco (u, v) in G) do
12.                     if(v è inesplorato) then
13.                             marca il vertice v come scoperto
14.                             F.push(v);
15.                             rendi u padre di v in T;
16.                     else if( v è scoperto) then
17.                             F.push(v);
18.                             rendi u padre di v in T;
19.     return T
```

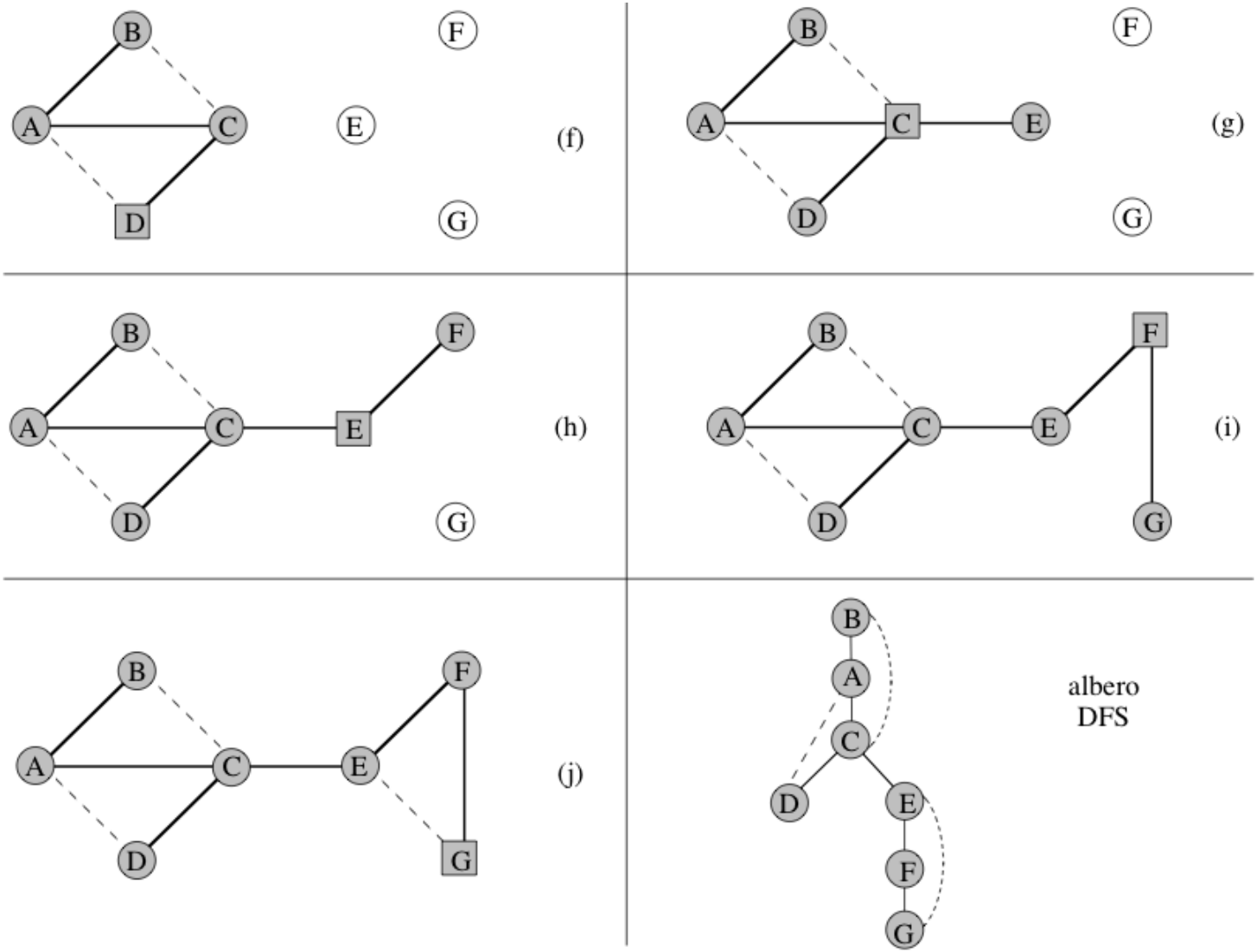
Un vertice può essere:

- `inesplorato`: il vertice non è stato ancora scoperto;
- `scoperto`: il vertice è stato scoperto ma non è ancora stato visitato
- `esplorato`: il vertice è scoperto e visitato.

Esempio: grafo non orientato (1/2)



Esempio: grafo non orientato (2/2)



Visita in profondità: versione ricorsiva

La visita in profondità di un grafo è analoga alla visita in preordine di un albero.

Naturalmente mentre nella visita in preordine su alberi si parla di "figli" di un nodo, qui parleremo di "vicini" di un nodo.

Per evitare cicli infiniti, dobbiamo garantire che un nodo venga visitato solo una volta

useremo un sistema di "marcatura" e lanceremo la chiamata ricorsiva su un vicino solo se questo non è marcato (ovvero non è mai stato visitato).

Visita in profondità: versione ricorsiva

procedura `visitaDFSRicorsiva`$(vertice\ v, albero\ T)$

1. *marca e visita il vertice* v
2. **for each** (arco (v, w)) **do**
3. **if** (w non è marcato) **then**
4. aggiungi l'arco (v, w) all'albero T
5. `visitaDFSRicorsiva`(w, T)

algoritmo `visitaDFS`$(vertice\ s) \rightarrow albero$

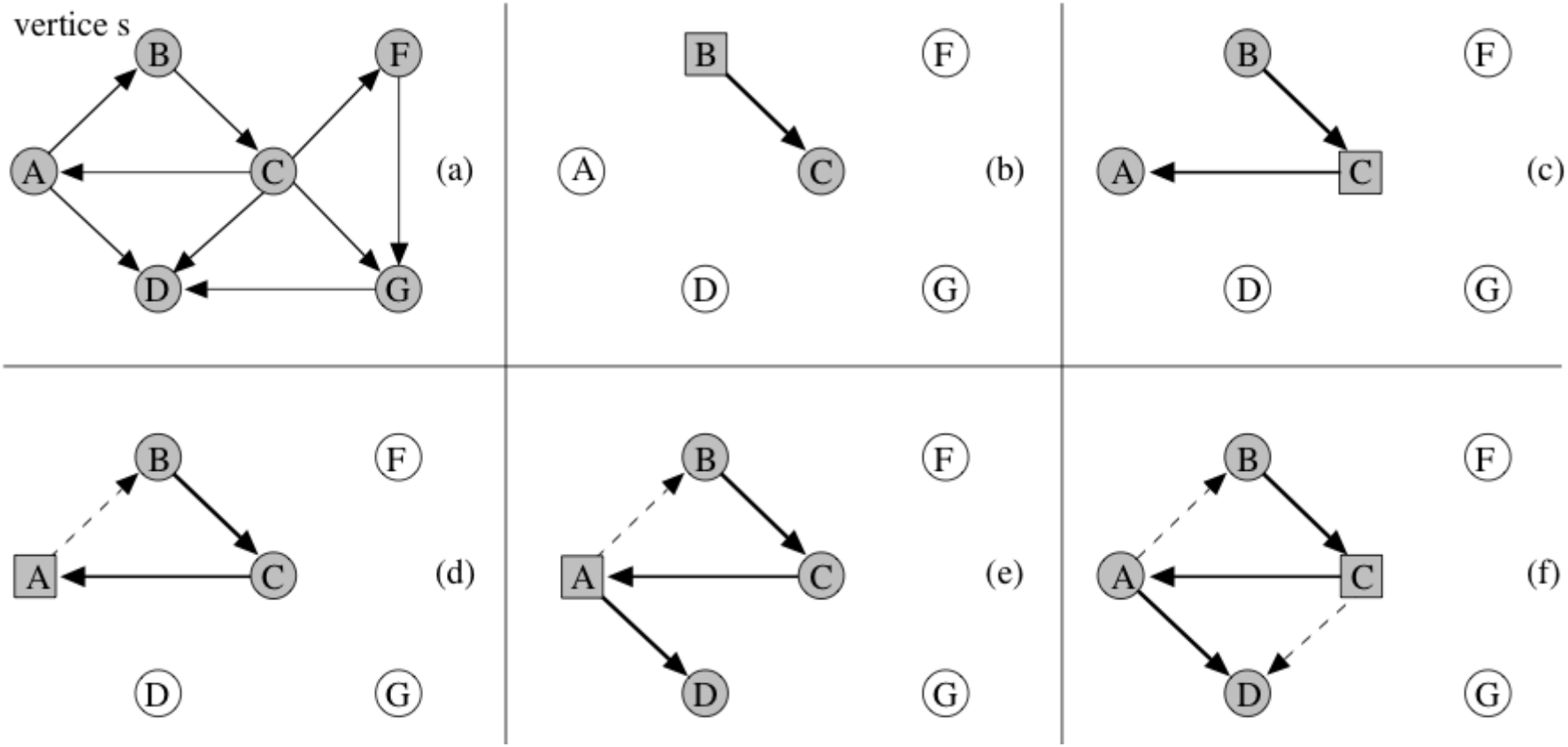
6. $T \leftarrow$ albero vuoto
7. `visitaDFSRicorsiva`(s, T)
8. **return** T

Visita in profondità: grafi orientati

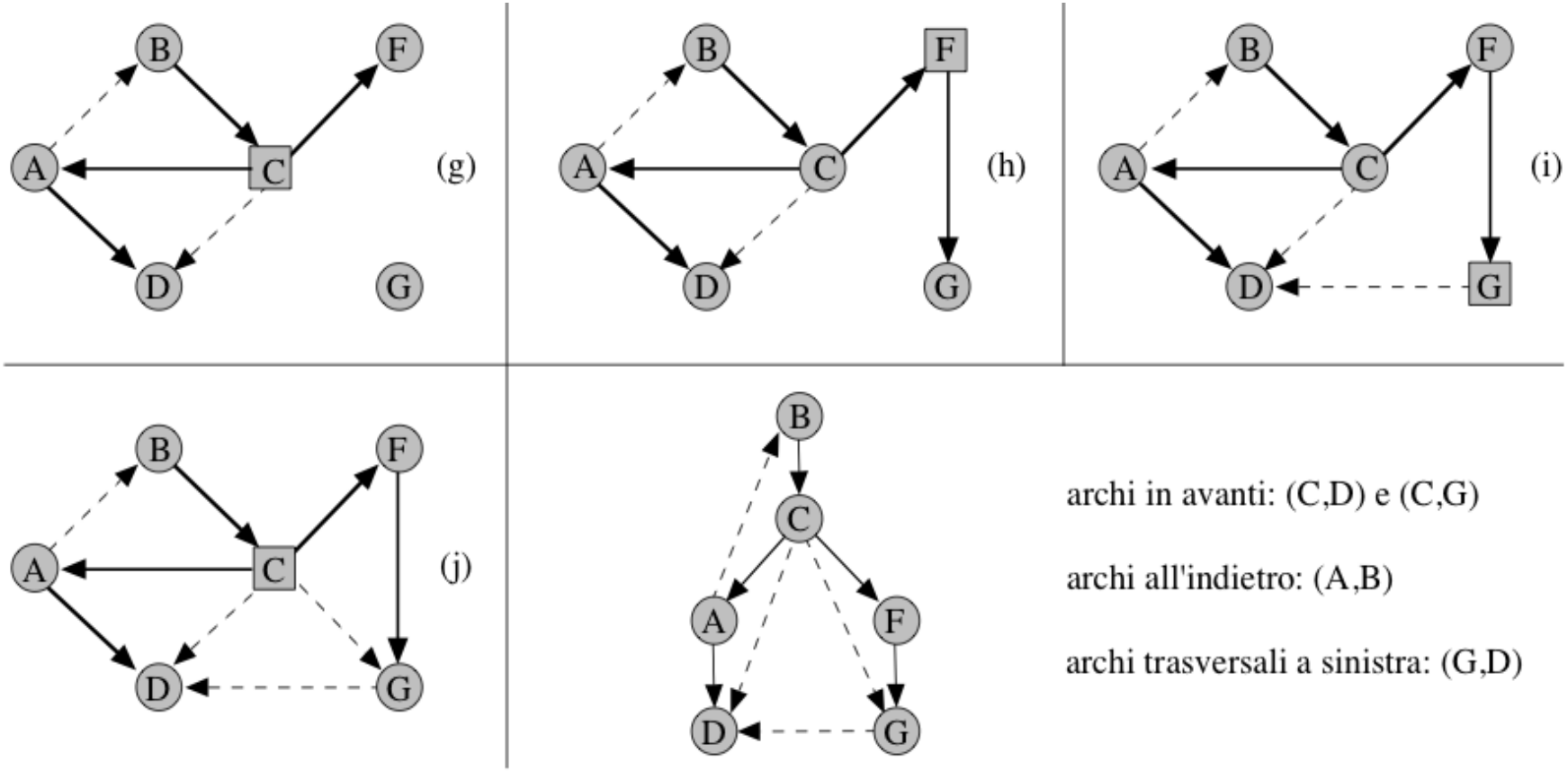
Anche la visita in profondità può essere applicata ai ***grafi orientati***.

Anche in questo caso nell'operazione di scelta dei vicini di un vertice **v** si dovranno scegliere **solo** gli archi **(v, w)** *uscenti* da **v**

Esempio: grafo orientato (1/2)



Esempio: grafo orientato (2/2)



Proprietà

Sia **G = (V,E)** un grafo ***non orientato*** e sia **T** l'albero DFS prodotto dalla visita in profondità di **G**. Per ogni arco **(u,v)** di **G** avremo:

- **(u,v)** è un arco dell'albero DFS **T**, oppure
- i nodi **u** e **v** sono l'uno discendente/antenato dell'altro nell'albero **T**

Sia **G = (V,E)** un grafo ***orientato*** e sia **T** l'albero DFS prodotto dalla visita in profondità di **G**. Per ogni arco **(u,v)** di **G** avremo:

- **(u,v)** è un arco dell'albero DFS, oppure
- i nodi **u** e **v** sono l'uno discendente/antenato dell'altro nell'albero **T**, oppure
- **(u,v)** è un arco trasversale a sinistra, ovvero il vertice **v** è in un sottoalbero visitato precedentemente ad **u**

La relazione "raggiungibile da"

Proprietà: La relazione di ***raggiungibilità*** tra vertici in un grafo è una relazione di ***equivalenza***.

Una relazione è una relazione di **equivalenza** se è *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*.

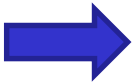
- **Riflessività**: ogni nodo è *raggiungibile da* se stesso;
- **Simmetria**: se **v** è *raggiungibile da* **u**, allora **u** è *raggiungibile da* **v**
- **Transitività**: se **v** è *raggiungibile da* **u** e **u** è *raggiungibile da* **w** allora **v** è *raggiungibile da* **w**

Componenti connesse

Definizione: Sia dato un grafo G = (V,E) *non orientato*. Le **componenti connesse di G** solo le classi di equivalenza dei suoi vertici rispetto la relazione "raggiungibile da"

Ricordiamo che:

Un grafo *non orientato* **G = (V, E)** si dice ***connesso*** se esiste un cammino tra ogni coppia di vertici in **G**.



Un grafo *non orientato* è **connesso** se e solo se ha una sola **componete connessa**.

Componenti connesse

Per verificare se un grafo **G** con **n** nodi è **connesso** è sufficiente quindi eseguire una *visita* (ad esempio una visita in ampiezza) del grafo: se l'albero **T** restituito da contiene esattamente **n** nodi, allora siamo riusciti a raggiungere tutti i nodi e quindi **G** è **connesso.**

Se invece **T** contiene meno nodi di **n** nodi, il grafo G avrà più componenti connesse e quindi è **non connesso**

Se un grafo non è **connesso**, per visitare tutti i sui nodi sarà sufficiente lanciare l'algoritmo di visita a partire da un qualunque nodo **s** calcolando così l'albero **T**, e poi da un qualunque nodo s' di G non in **T**, e così via.

La relazione "fortemente connesso"

Ricordiamo che:

Un vertice **x** è ***fortemente connesso*** ad un vertice **y** se esiste un cammino (orientato) da **x** ad **y** ed un cammino (orientato) da **y** a **x**.

Proprietà: La relazione di ***connettività forte*** tra vertici in un grafo orientato è una relazione di ***equivalenza***.

(è sufficiente dimostrare che è una relazione *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*.)

Componenti fortemente connesse

Definizione: Sia G = (V,E) un grafo orientato. Le componenti fortemente connesse di G sono le classi di equivalenza della relazione di connettività forte:

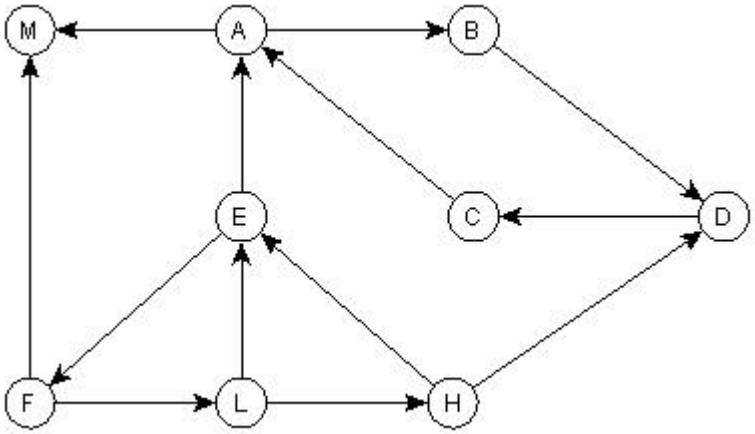
[v] = { u tale che **u** è un nodo di **G** fortemente connesso a **v }**

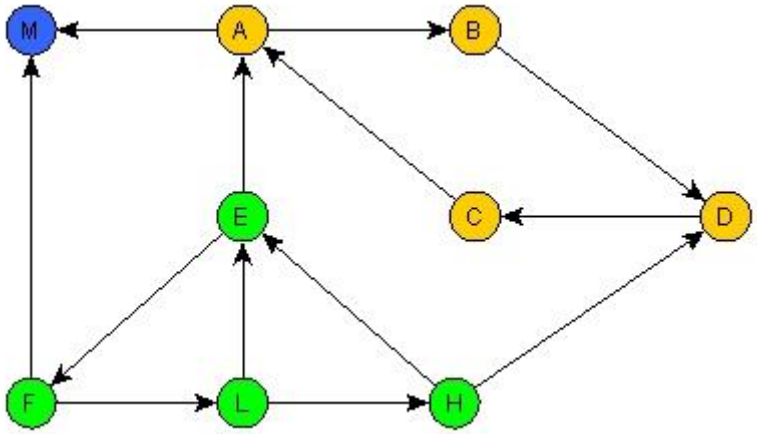
Dalla definizione di *componenti fortemente connesse* segue che un grafo **G** è ***fortemente connesso*** se e solo se ha una sola *componente fortemente connessa*.

Componenti fortemente connesse

Esempio:

notare che una componente fortemente connessa può essere formata anche da un solo nodo (nodo M)





Calcolare le componenti fortemente connesse

Per calcolare *la componente fortemente connessa* contente il vertice **x** operiamo calcolando i seguenti due insiemi:

- I discendenti **D(x)**, ovvero tutti i nodi di **G** raggiungibili da **x** (per calcolarli eseguiamo una visita partendo da **x**)
- Gli antenati **A(x)**, ovvero tutti i nodi di G che raggiungono **x** (per calcolarli prima invertiamo la direzione di tutti gli archi in **G** e poi eseguiamo una visita partendo da **x**)

La *componente fortemente connessa* contenente **x** sarà data dai nodi che sono nell'intersezione tra **D(x)** e **A(x)**.

Per calcolare tutte le *componenti fortemente connesse* di **G** iteriamo il procedimento per tutti i nodi di **G**.

Riepilogo

- Concetto di grafo e terminologia
- Diverse strutture dati per rappresentare grafi nella memoria di un calcolatore
- L'utilizzo di una particolare rappresentazione può avere un impatto notevole sui tempi di esecuzione di un algoritmo su grafi (ad esempio, nella visita di un grafo)
- Algoritmo di visita generica e due casi particolari: visita in ampiezza e visita in profondità
- Componenti connesse e fortemente connesse di un grafo.