

Fast Fourier Transform (FFT)

Input: $x(k)$ $k=0, 1, \dots, N-1$

Output: $X(m)$ $m=0, 1, \dots, N-1$

DFT:

$$X(m) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} km} \quad m=0, 1, \dots, N-1$$

• Complessità:

• In si eseguono N moltiplicazioni $\rightarrow N^2$ moltiplicazioni

• Le prime architetture di computer

• né fixed-point né floating-point moltiplicatori

• moltiplicazione eseguita con routines che usavano shift e add operations

• FFT è un algoritmo altamente efficiente per il calcolo della DFT

• L'idea di base è quella di ridurre il numero di moltiplicazioni eliminando quelle ridondanti.

• Analizziamo l'algoritmo radix-2 FFT con decimazione nel tempo

$$X(m) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{km} \quad m=0, 1, \dots, N-1$$

$$W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$$

Proprietà di simmetria e periodicità di W_N

- $W_N^{k(N-m)} = W_N^{-km} = \overline{W_N^{km}}$ simmetria complesso coniugato
- $W_N^{km} = W_N^{k(m+N)} = W_N^{m(k+N)}$ periodicità in m e k
- $W_N^m = -W_N^{m-\frac{N}{2}}$ per $m \geq \frac{N}{2}$

Assumiamo che N è pari ($N = 2N'$)

L'algoritmo suddivide gli N campioni in 2 sottoinsiemi di lunghezza $\frac{N}{2} = P$

$x(n) \begin{cases} x(2k) & \text{campioni pari} \\ x(2k+1) & \text{campioni dispari} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 X(m) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{km} = \\
 &= \sum_{k=0}^{P-1} x(2k) W_N^{2km} + \sum_{k=0}^{P-1} x(2k+1) W_N^{(2k+1)m} = \\
 &\quad \text{EVEN} \qquad \qquad \qquad \text{ODD} \\
 &= \sum_{k=0}^{P-1} x(2k) W_N^{2km} + W_N^m \sum_{k=0}^{P-1} x(2k+1) W_N^{2km} = \\
 &= \sum_{k=0}^{P-1} x(2k) W_P^{km} + W_N^m \sum_{k=0}^{P-1} x(2k+1) W_P^{km} = \\
 &= A(m) + W_N^m B(m) \qquad m = 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

Note: $W_N^{2km} = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)2km} = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N/2}\right)km} = W_{N/2}^{km}$

$A(m)$: DFT con gli $\frac{N}{2}$ campioni pari

$B(m)$: DFT con gli $\frac{N}{2}$ campioni dispari

- Dalla proprietà di periodicità della DFT

$$A\left(m + \frac{N}{2}\right) = A(m) \quad \text{e} \quad B\left(m + \frac{N}{2}\right) = B(m)$$

Quindi:

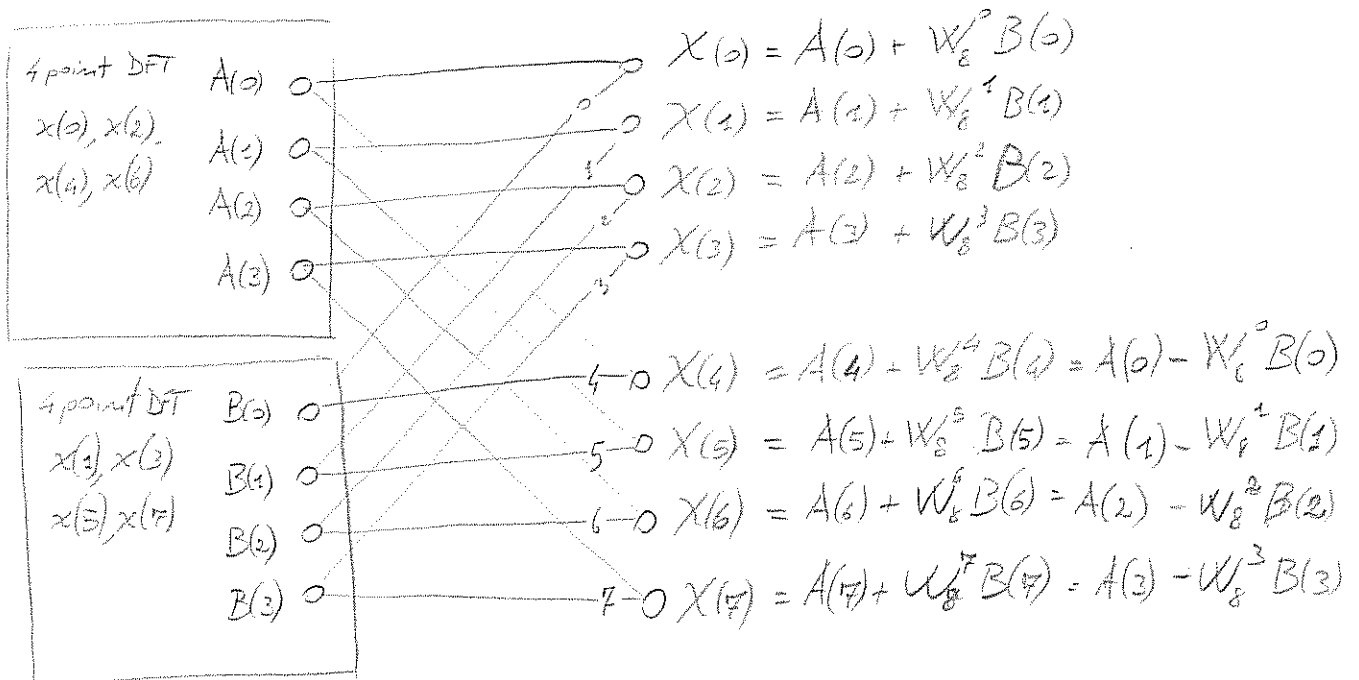
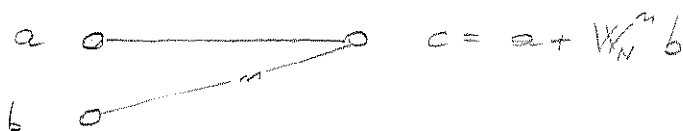
$$\begin{cases} X(m) = A(m) + W_N^m B(m) & m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ X(m) = A\left(m - \frac{N}{2}\right) - W_N^{m - \frac{N}{2}} B\left(m - \frac{N}{2}\right) & m = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

Esempio

$$N=8 \quad P=4$$

$$\begin{cases} X(3) = A(3) + W_8^3 B(3) \\ X(7) = A(7) + W_8^7 B(7) = A(3) - W_8^3 B(3) \end{cases}$$

Signal-flow graph (Mannson's graph modification)



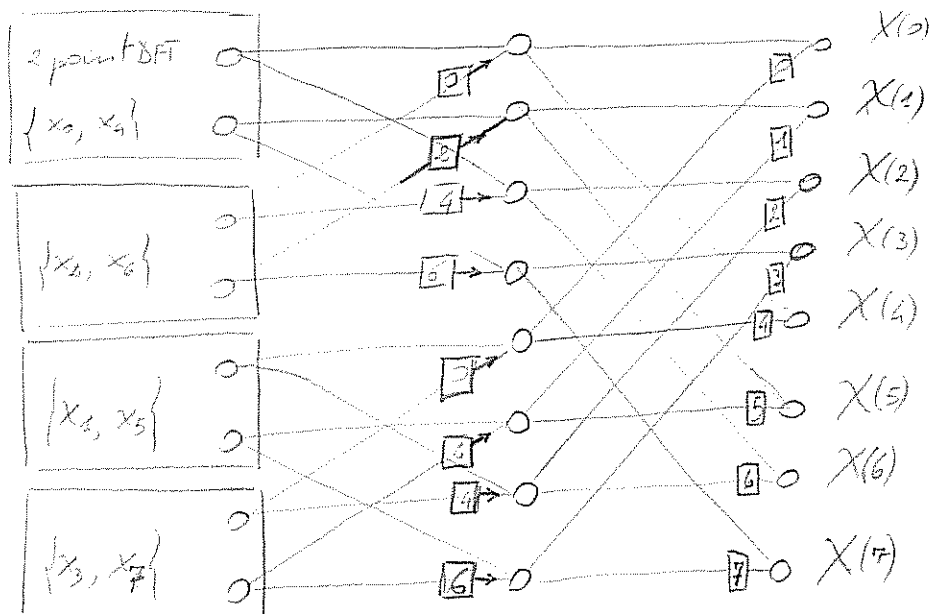
Primo step dell'algoritmo

• Complessità:

- $\frac{N}{2}$ moltiplicazioni per $\frac{N}{2}$ campioni per: $\left(\frac{N}{2}\right)^2$
- $\frac{N}{2}$ " " $\frac{N}{2}$ " " " $\left(\frac{N}{2}\right)^2$
- $\frac{N}{2}$ moltiplicazioni per combinare i due sottogruppi:

$$2 \left(\frac{N}{2}\right)^2 + \frac{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2} \leq N^2$$

• Se N è divisibile per 4 il processo può essere iterato ricorrendo decimando ogni gruppo di $\frac{N}{2}$ elementi in 2 sottogruppi di $\frac{N}{4}$ elementi.

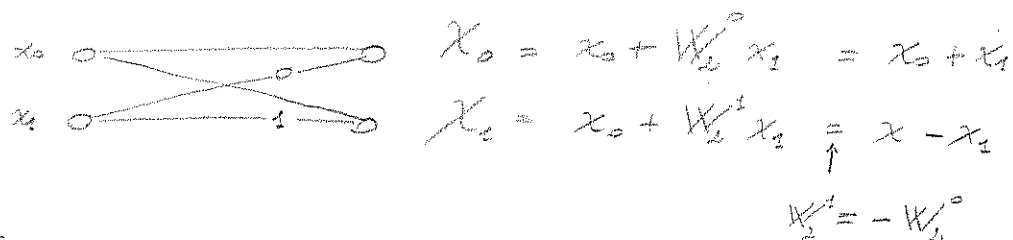


• In generale, se la lunghezza della sequenza è pari a $N = 2^q$ si possono aggiungere colonne e sinistre finché la dimensione del sottogruppo è pari a 2

$$2^{q-1} \quad \dots \quad 2^{q-2} \quad 2^{q-1} \quad 2^q$$

$q-1$ colonne

= 2 point DFT $\rightarrow$ FFT butterfly



1 Somme

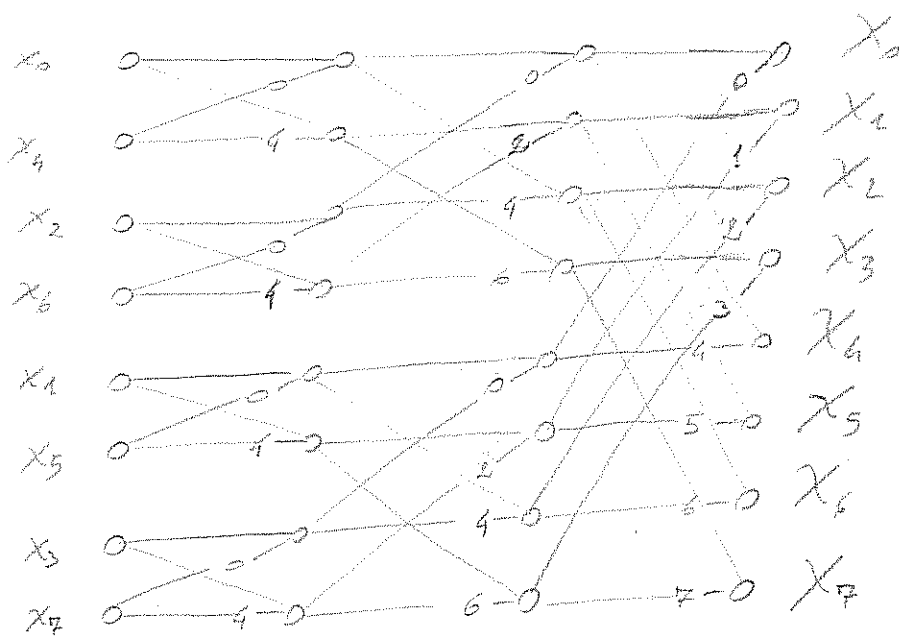
1 Differenza

Complessate:

$N = 2^q$ $q = \log_2(N)$ colonne di segnali.

Dopo la somma e la differenza ci hanno $q-1$ colonne di operazioni ognuna delle quali richiede $\frac{N}{2}$ moltiplicazioni

$$\rightarrow \frac{N}{2} (\log_2(N) - 1) \leq N^2$$



• la sequenza x_k deve essere ordinata per poter eseguire correttamente la FFT

Il particolare ordinamento richiesto dalla FFT
è noto con il nome di input bit reversed

Algoritmo

- 1) Esprimi l'indice k in q bits
- 2) Inverti l'ordine dei bits
- 3) Converti in decimale $\rightarrow$ posizione di x_k nella
sequenza in input della FFT

Esempi

$$N = 8 \rightarrow q = 3$$

$$x_6 \quad 6 \rightarrow 110 \rightarrow 011 = 3$$

$$x_3 \quad 5 \rightarrow 011 \rightarrow 110 = 6$$

$$N = 256 \rightarrow q = 8$$

$$x_{37} \quad 37 \rightarrow 00100101 \rightarrow 10100100 = 164$$