Esercizio 1 – 27 Giugno 2006

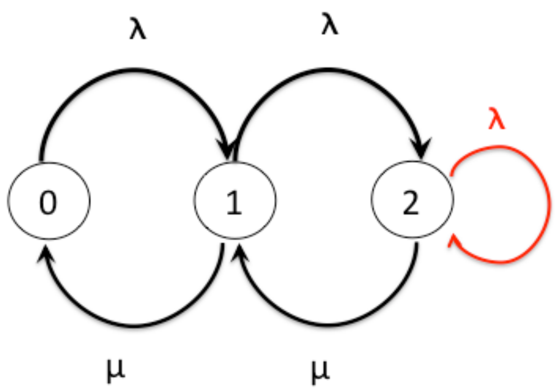
Si consideri un sistema a code caratterizzato da un servente ed un posto in coda. Si supponga che il processo degli arrivi sia Poissoniano con valor medio λ pacchetti/secondo e che il tempo di trasmissione sia una variabile casuale esponenziale negativa con media pari ad $1/\mu$ secondi.

1)Si indichi per quali valori di λ (fissato μ) il sistema è stabile, ovvero raggiunge uno stato stazionario.

Il sistema è sempre stabile (ovvero, raggiunge uno stato stazionario) per ogni valore di λ e μ essendo caratterizzato da una coda finite (pari ad 1 solo posto in coda).

2) Si descriva, tramite una catena di Markov, il sistema in esame, specificando con precisione gli stati introdotti e le transizioni tra tali stati.

Stato: numero pacchetti nel sistema (da 0 a 2).
Catena di Markov:



3)Si calcoli, in forma letterale, la distribuzione stazionaria del numero di pacchetti nel sistema.

Le probabilità di stato stazionarie della catena di Markov qui sopra si ottengono semplicemente imponendo l'equilibrio dei flussi al nodo 0, quindi al nodo 2 (è più semplice da scrivere), ed infine imponendo che le probabilità stazionarie sommino ad 1. Quindi:

Equilibrio nodo 0: $\lambda p_0 = \mu\, p_1$
Equilibrio nodo 2: $\lambda p_1 = \mu\, p_2$

Condizione di normalizzazione: $p_0 + p_1 + p_2 = 1$

Definiamo per comodità (come indicato nel testo dell'esercizio):
$\rho = \lambda / \mu$

Risulta quindi dalla 1a equazione: $p_1 = \rho\, p_0$
Dalla 2a equazione: $p_2 = \rho\, p_1 = \rho^2 p_0$

Infine sostituendo nella 3a equazione: $p_0+\rho\, p_0+ \rho^2\, p_0 =1$, ovvero:
$p_0\, (1+\rho + \rho^2)= 1$.

Quindi le probabilità di stato stazionarie risultano pari a :
$p_0 = 1/ (1+\rho+ \rho^2)$
$p_1 = \rho / (1+\rho+ \rho^2)$
$p_2 = \rho^2 / (1+\rho+ \rho^2)$

4) Si determini il massimo valore di $\rho \equiv \lambda/\mu$ (ρ_{max}) che permette al sistema di avere una probabilità di blocco inferiore od uguale a 0.2.

La probabilità di blocco è la probabilità di trovarsi nelo stato 2, ovvero:
Pblocco= $p_2 = \rho^2 / (1+\rho+ \rho^2)$

Imponiamo Pblocco = 0.2 per trovare il valore di ρ_{max} cercato.

$\rho^2 / (1+\rho+ \rho^2) = 0.2$
Da cui: $\rho^2 =(1+\rho+ \rho^2)*0.2$
$0.8\rho^2 - 0.2\rho - 0.2=0$

Da cui: $\boldsymbol{\rho_{max} = 0.6404}$

Si consideri quindi il caso $\lambda= \mu/3$. In questa ipotesi:
5)Si calcoli la probabilità di blocco del sistema
$\lambda= \mu/3$ equivale a dire $\rho=1/3$.
Per cui Pblocco = $p_2 = \rho^2 / (1+\rho+ \rho^2) = 0.0769$

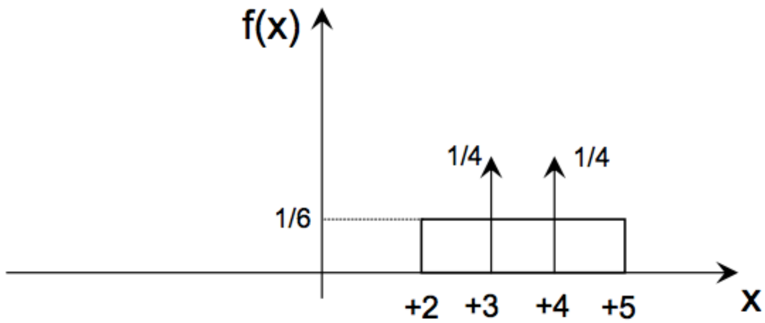
6)Si calcoli il numero medio di pacchetti nel sistema
$N= 0*p_0+1*p_1+2*p_2 = p_1+2*p_2$
$N=5/13 = 0.3846$

Esercizio 2

Sia U una variabile aleatoria a distribuzione uniforme in [0,1]. Si indichi un procedimento per:
1)sintetizzare una variabile aleatoria discreta X, caratterizzata dalla seguente distribuzione:

$$P(X=x)=\begin{cases} 0.5 & \text{per } x=1 \\ 0.25 & \text{per } x=2 \\ 0.25 & \text{per } x=3 \end{cases}$$

2)sintetizzare una variabile avente densità di probabilità $f_X(x)=(x+1)^2 \quad -1 \le x \le \sqrt[3]{3}-1$
3)sintetizzare una variabile avente densità di probabilità f(x) indicata nella seguente figura:



1)La soluzione è la seguente:
Se U <= 0.5 -> X=1
Se 0.5<U <= 0.75 -> X=2
Se 0.75 < U <= 1 -> X=3

2) Utilizziamo il metodo del percentile: calcoliamo la funzione di ripartizione F(U), che è pari all'integrale

$$F_X(x)=\int_{-1}^{x}(y+1)^2dy=\left[\frac{(y+1)^3}{3}\right]_{-1}^{x}=\frac{(x+1)^3}{3}$$

Ora inverto la F_X e la applico alla v.a. U, ovvero:

$U=\frac{1}{3}(X+1)^3$ da cui $\boldsymbol{X=-1+\sqrt[3]{3U}}$

3)La soluzione è la seguente: il rettangolo in figura ha area (5-2)+1/6 = ½. Quindi:

Procedo a sintetizzare questa variabile aleatoria "spezzando" il procedimento in tre parti: sintetizzo prima la "parte" della distribuzione rettangolare +2 e +5. L'area di questa parte è pari a (5-2)+1/6 = ½? Poi procedo con le due delte di Dirac.

Procedo in questo modo: data U la nostra v.a. Uniforme fra 0 e 1:

- se 0<= U<= 1/2 allora moltiplicando per 6 ho -> 6U sarà uniforme ("distribuzione "piatta") compreso fra 0 e +3. Quindi **6U+2** sarà sempre uniforme ("piatta") tra +2 o +5, come desiderato.

- se 1/2< U<= 3/4 allora semplicemente porro':
  X=+3
- se 3/4< U<= 1 allora semplicemente porro':
  X=+4

Riassumendo:
Se 0<= U<= 1/2 -> X=6U+2
Se 1/2< U<= 3/4 -> X=+3
Se 3/4< U<= 1-> X=+4

<u>Esercizio 3</u>

Si consideri una connessione ottica che viene trasmessa su un cammino (path) lungo 1600 km. Questo cammino è soggetto a guasti (failures) che vengono stimati essere in media pari a 5 failures/anno/1000 km (ovvero, 5 failures per anno ogni 1000 km di fibra). Il tempo medio di riparazione di un guasto (Mean Time To Repair, MTTR) risulta pari in media a 12 ore.

1)Si determini l'availability media di tale connessione.

2)Si supponga che si voglia garantire per tale connessione un'availability non inferiore al 99.99% (classe di servizio "Gold"). A tal fine si stabilisca (mostrando il procedimento svolto) quale (o quali) tra le due seguenti soluzioni sia quella che rispetta tale vincolo di affidabilità:

- A)proteggere la connessione in modo dedicato utilizzando un cammino di backup di uguale lunghezza e link-disjoint rispetto al cammino della connessione principale (protezione 1:1).
- B) proteggere la connessione in modo dedicato utilizzando due cammini di backup di uguale lunghezza e link-disjoint rispetto al cammino della connessione principale (protezione 2:1).

Si indichi qual è l'availability ottenuta utilizzando la soluzione scelta.

<u>Soluzione:</u>
In questo caso ho un cammino soggetto a 5 guasti (failures) all'anno ogni 1000 km. La nostra connessione è lunga pero' 1600km, quindi sarà soggetta a 5*1600/1000 = 8 failures/anno.

Un anno è composto da 365*24= 8760 ore.

Quindi avremo 8 failures ogni 8760 ore, ovvero in media il Mean Time To Failure (tempo medio tra un guasto ed il successivo) sarà pari a 8760/8 = 1095 ore.

Il MTTR è dato dal testo del problema: 12 ore

Riassumendo:
MTTF= 1095 ore
MTTR = 12 ore

Domanda 1) L'affidabilità (availability) media della connessione, A, ovvero la risposta alla domanda numero 1) è data da:

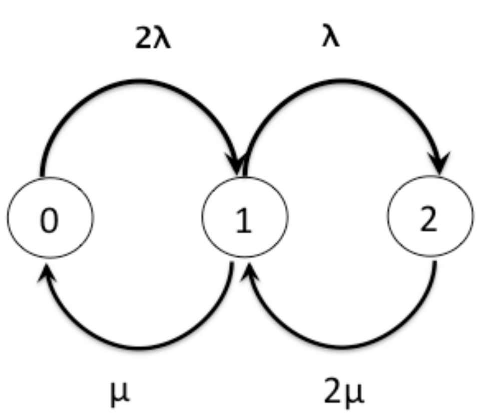
A = MTTF/(MTTF+MTTR)= 1095/(1095+12)=1095/1107=**0.9892, ovvero 98.92%**

Domanda 2)

Anzitutto, il livello di affidabilità richiesto (99.99%, "Gold") **NON** viene rispettatato per la connessione NON protetta. Vediamo ora i casi di protezione 1:1 e 2:1.

A) Nel caso di protezione 1:1, ho un cammino di protezione dedicato, che protegge appunto il mio cammino (connessione) principale.

Utlizziamo il modello illustrato nella serie di lucidi sulla protezione delle reti di telecomunicazione (https://cs.unibg.it/martignon/documenti/reti/Seminario_WDM_protection.pdf), in particolare le slide 18 e 19 ("Analysis of 1:N protection without Service Differentiation"). Nel nostro caso la catena di Markov risulta essere la seguente, molto semplice:



Nella catena qui sopra, lo stato rappresenta il numero di connessioni (senza distinzione tra la connessione principale e quella di backup) che sono guaste, ed è ovviamente compreso tra 0 (nessun guasto) e 2 (entrambe guaste).

$\lambda = 1/MTTF = 1/1095$ (ore^-1)
$\mu = 1/MTTR = 1/12$ (ore^-1)

Definiamo per comodità:
$\rho = \lambda/\mu = 12/1095 = 0.0109589$

Le probabilità di stato stazionarie della catena di Markov qui sopra si ottengono semplicemente imponendo l'equilibrio dei flussi al nodo 0, e quindi al nodo 2 (è più semplice da scrivere), ed infine imponendo che le probabilità stazionarie sommino ad 1. Quindi:

Equilibrio nodo 0: $2\lambda p_0 = \mu\, p_1$
Equilibrio nodo 2: $\lambda p_1 = 2\mu\, p_2$
Condizione di normalizzazione: $p_0 + p_1 + p_2 = 1$

Risulta quindi dalla 1a equazione: $p_1 = 2(\lambda/\mu)p_0 = 2\rho\, p_0$
Dalla 2a equazione: $p_2 = (\lambda/2\mu)p_1 = (\rho/2)\, p_1 = \rho^2\, p_0$
Infine sostituendo nella 3a equazione: $p_0 + 2\rho\, p_0 + \rho^2\, p_0 = 1$, ovvero: $p_0\,(1+\rho)^2 = 1$

Quindi:
$p_0 = 1/(1+\rho)^2$
$p_1 = 2\rho/(1+\rho)^2$
$p_2 = \rho^2/(1+\rho)^2$

L'unavailability media (si veda equazione di slide 19), che indicheremo con $U_{1:1}$, si calcola come segue, tenendo conto che nel nostro caso N = 1 (protezione 1:1)

$$U(N,\lambda,\mu) = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{(n-1)}{N}\, p(n)$$

- Nello stato *n*, per *n*>=2, ci sono infatti (*n*-1) connessioni non protette sul totale delle *N* connessioni
- La probabilità che, nello stato *n*, una connessione scelta a caso fra le *N* sia proprio tra le (*n*-1) non protette è data dal rapporto (*n*-1)/*N*

Quindi nel nostro caso $U_{1:1} = p_2$. Del resto è ovvio: l'unico stato in cui la connessione principale NON risulta protetta è proprio quando entrambe le connessioni

(principale e di backup) sono guaste, ovvero lo stato “2”, che si verifica con probabilità p_2.
Di conseguenza l’affidabilità media del nostro sistema di protezione 1:1, che indichiamo come $A_{1:1}$, sarà data da $A_{1:1} = 1 - U_{1:1}$.

Numericamente $U_{1:1}=p_2$ = 1.1750795*10^-4
Quindi: $A_{1:1}=1- U_{1:1}$ = **0.999882,** che è la risposta alla nostra domanda numero 2).
Ovvero 99.9882%
Il livello di affidabilità media richiesto NON è ancora rispettato.

Nota: in questo caso molto semplice (due sole connessioni, una primaria e una di backup) si puo’ anche ragionare semplicemente partendo dalla risposta al punto 1. Abbiamo infatti due connessioni (la principale e quella di backup), identiche, caratterizzate ciascuna da una affidabilità A = MTTF/(MTTF+MTTR)= 1095/(1095+12)=1095/1107=**0.9892**

Ma allora, l’unavailability (probabilità di guasto) per ciascuna di esse risulta pari a 1-A, e la probabilità che entrambe siano guaste contemporaneamente risulta (si tratta di eventi disgiunti): $(1-A)^* (1-A) = (1-A)^2$

Quindi l’affidabilità del nostro sistema 1:1, $A_{1:1}$, è calcolabile come :
$A_{1:1} = 1 - (1-A)^2$ = **0.999882**

B) Anche in questo caso, è possibile utilizzare una catena di Markov per modellizzare il sistema, oppure, più semplicemente, operare come nella Nota precedente.

Nota: in questo caso molto semplice (tre sole connessioni, una primaria e due di backup) si puo’ anche ragionare semplicemente partendo dalla risposta al punto 1. Abbiamo infatti 3 connessioni (la principale e le 2 di backup), identiche, caratterizzate ciascuna da una affidabilità A = MTTF/(MTTF+MTTR)= 1095/(1095+12)=1095/1107=**0.9892**

Ma allora, l’unavailability (probabilità di guasto) per OGNUNA di esse risulta pari a 1-A, e la probabilità che tutte e 3 siano guaste contemporaneamente risulta (si tratta di eventi disgiunti): $(1-A)^* (1-A)^*(1-A) = (1-A)^3$

Quindi l’affidabilità del nostro sistema 2:1, $A_{2:1}$, è calcolabile come :
$A_{2:1} = 1 - (1-A)^3$ = **0.99999874 = 99.999874%**
In questo caso il livello di affidabilità media richiesto E’ RISPETTATO. Devo quindi scegliere la soluzione B.