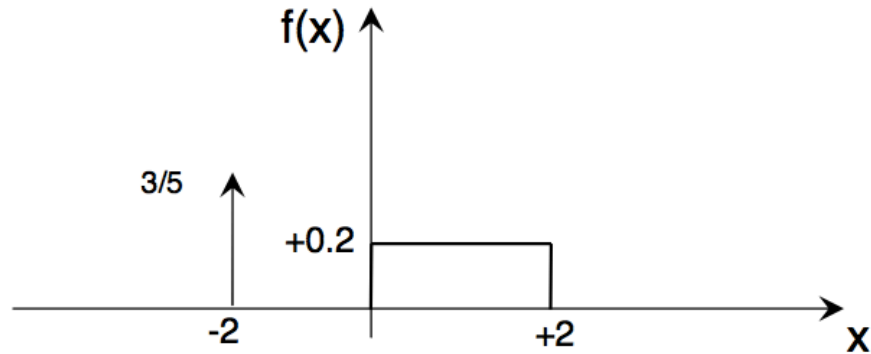


### Esercizio 3

Si consideri una variabile aleatoria  $U$  avente distribuzione uniforme in  $[0,1]$ .

Sia  $X$  una variabile aleatoria avente densità di probabilità  $f(x)$  indicata nella seguente figura:



1a) Si calcoli quanto vale la probabilità che  $X$  sia minore o uguale di 0.5, ovvero  $P(X \leq 0.5)$

1b) Si indichi un procedimento per sintetizzare la variabile aleatoria  $X$

2) Si indichi un procedimento per:

a) sintetizzare una variabile aleatoria uniforme negli intervalli  $[-5, -4]$  e  $[+2, +5]$

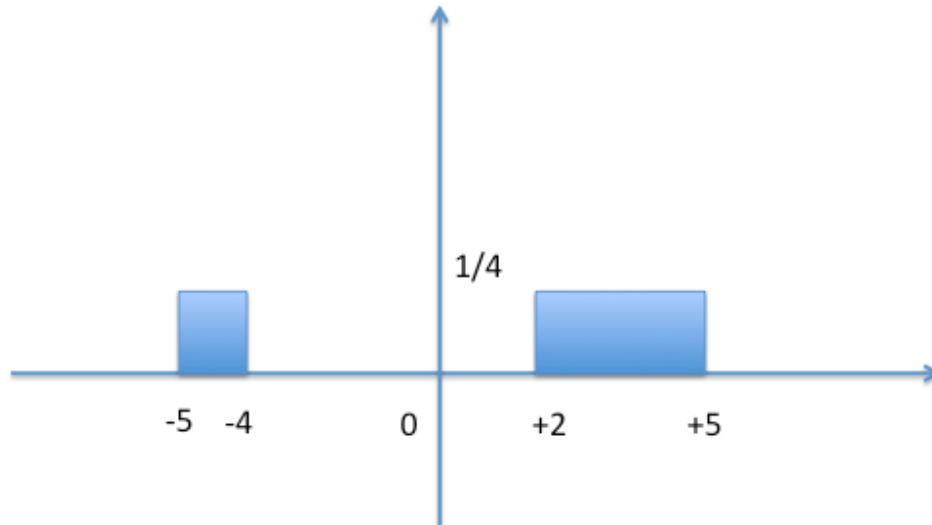
b) sintetizzare una variabile  $Y$  avente densità di probabilità  $f_Y(x) = \frac{1}{2}(x+1) \quad -1 \leq x \leq +1$

1) a)  $P(X \leq 0.5) = 3/5 + 0.2 \cdot 0.5 = 3/5 + 1/10 = 7/10 = 0.7$

b)

- Se  $U$  è compreso fra  $0 \leq U \leq 3/5$ , pongo  $X = -2$
- Se  $U$  è compreso fra  $3/5 < U \leq 1$ , moltiplicando per 5 ho  $\rightarrow 5U$  sarà uniforme ("distribuzione "piatta") compresa fra +3 e +5. Quindi  $5U - 3$  sarà sempre uniforme ("piatta") tra 0 e +2, come desiderato.
- Riassumendo, per sintetizzare la nostra v.a., semplicemente porro':  
**se  $0 \leq U \leq 3/5 \rightarrow X = -2$**   
**se  $3/5 < U \leq 1 \rightarrow X = 5U - 3$**

2) a) Il supporto della variabile aleatoria che vogliamo sintetizzare è compreso fra -5 e -4 (ampiezza = 1) e tra +2 e +5 (ampiezza uguale a 3). Ecco la distribuzione di probabilità:



Procedo a sintetizzare questa variabile aleatoria “spezzando” il procedimento in due parti: sintetizzo prima la “parte” della distribuzione compresa fra -5 e -4. L’area di questa parte è pari a  $1/4$

Procedo in questo modo: data  $U$  la nostra v.a. Uniforme fra 0 e 1:

- se  $0 \leq U \leq 1/4$  allora moltiplicando per 4 ho  $\rightarrow 4U$  sarà uniforme (“distribuzione “piatta”) compreso fra 0 e +1. Quindi  $4U-5$  sarà sempre uniforme (“piatta”) tra -5 o -4, come desiderato.
- se  $1/4 < U \leq 1$  allora moltiplicando per 4 ho  $\rightarrow 4U$  sarà uniforme (“distribuzione “piatta”) compreso fra +1 e +4. Quindi  $4U+1$  sarà sempre uniforme (“piatta”) tra +2 o +5, come desiderato.
- Riassumendo, per sintetizzare la nostra v.a., semplicemente porro’:  
**se  $0 \leq U \leq 1/4 \rightarrow X=4U-5$**   
**se  $1/4 < U \leq 1 \rightarrow X=4U+1$**

**2b)** Utilizziamo il metodo del percentile: calcoliamo la funzione di ripartizione  $F(U)$ , che è pari all’integrale

$$F_X(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{2}(y+1)dy = \left[ \frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} \right]_{-1}^x = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(x+1)^2$$

Ora inverto la  $F_X$  e la applico alla v.a.  $U$ , ovvero:

$$U = \frac{1}{4}(X+1)^2 \text{ da cui } X = -1 \pm \sqrt{4U}$$

L’unica radice che ci interessa è ovviamente:  $X = -1 + 2\sqrt{U}$