

Esercizio 2

Sia U una variabile aleatoria a distribuzione uniforme in $[0,1]$.

1) Si indichi qual è la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria $X = \lceil 2 \cdot U \rceil + 3$, ove $\lceil \cdot \rceil$ indica l'operazione di arrotondamento all'intero superiore più vicino.

2) Si indichi un procedimento per:

a) sintetizzare una variabile aleatoria uniforme negli intervalli $[-5,0]$ e $[+2, +7]$

b) sintetizzare una variabile avente densità di probabilità $f_X(x) = \frac{1}{x^2} \quad -\infty \leq x \leq -1$

- 1) In questo caso, se U è compreso fra $0 < U \leq \frac{1}{2}$, $\lceil 2 \cdot U \rceil$ vale 1, e quindi $\lceil 2 \cdot U \rceil + 3$ vale 4
(Si noti, peraltro, che l'evento $U = 0$ è un evento a misura nulla.)
Se U è compreso fra $\frac{1}{2} < U \leq 1$, $\lceil 2 \cdot U \rceil$ vale 2, e quindi $\lceil 2 \cdot U \rceil + 3$ vale 5

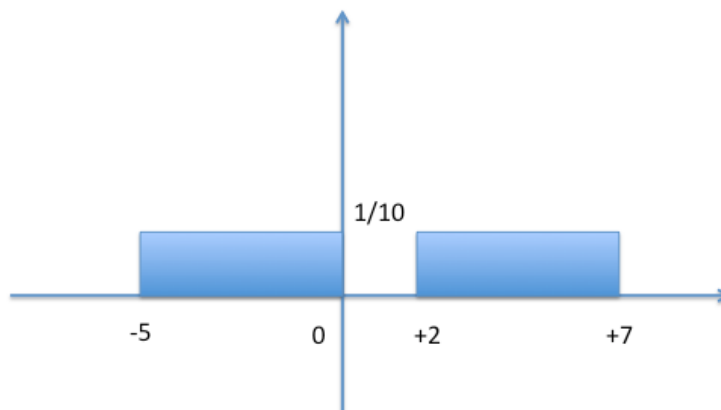
Quindi: la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X è :

$$P(X=4) = \frac{1}{2}$$

$$P(X=5) = \frac{1}{2}$$

Si tratta di una distribuzione bimodale, che assume appunto i due valori 4 o 5 con equiprobabilità ($\frac{1}{2}$) ciascuna.

- 2) **a)** Il supporto della variabile aleatoria che vogliamo sintetizzare è compreso fra -5 e 0 (ampiezza = 5) e tra +2 e +7 (ampiezza ancora uguale a 5). Ecco la distribuzione di probabilità:



Procedo a sintetizzare questa variabile aleatoria “spezzando” il procedimento in due parti: sintetizzo prima la “metà” della distribuzione compresa fra -5 e 0. L’area di questa parte è pari a 0.5 (1/2).

Procedo in questo modo: data U la nostra v.a. Uniforme fra 0 e 1:

- se $0 \leq U \leq \frac{1}{2}$ allora moltiplicando per 10 ho $\rightarrow 10U$ sarà uniforme (“distribuzione “piatta”) compreso fra 0 e +5. Quindi $10U-5$ sarà sempre uniforme (“piatta”) tra -5 o 0, come desiderato.
- se $\frac{1}{2} < U \leq 1$ allora moltiplicando per 10 ho $\rightarrow 10U$ sarà uniforme (“distribuzione “piatta”) compreso fra +5 e +10. Quindi $10U-3$ sarà sempre uniforme (“piatta”) tra +2 o +7, come desiderato.
- Riassumendo, per sintetizzare la nostra v.a., semplicemente porro’:
se $0 \leq U \leq \frac{1}{2} \rightarrow X=10U-5$
se $\frac{1}{2} < U \leq 1 \rightarrow X=10U-3$

2b) Utilizziamo il metodo del percentile: calcoliamo la funzione di ripartizione $F(U)$, che è pari all’integrale

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{y^2} dy = \left[-\frac{1}{y} \right]_{-\infty}^x = -\frac{1}{x}$$

Ora inverto la F_X e la applico alla v.a. U, ovvero:

$$U = -\frac{1}{x} \text{ da cui } X = -\frac{1}{U}$$