

## Esercizio 2

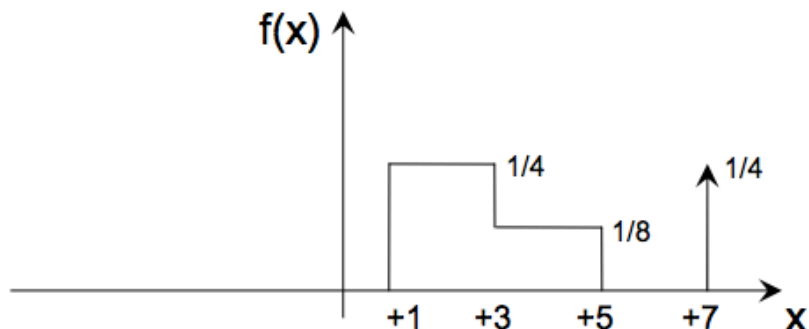
Sia  $U$  una variabile aleatoria a distribuzione uniforme in  $[0,1]$ .

Si indichi un procedimento per:

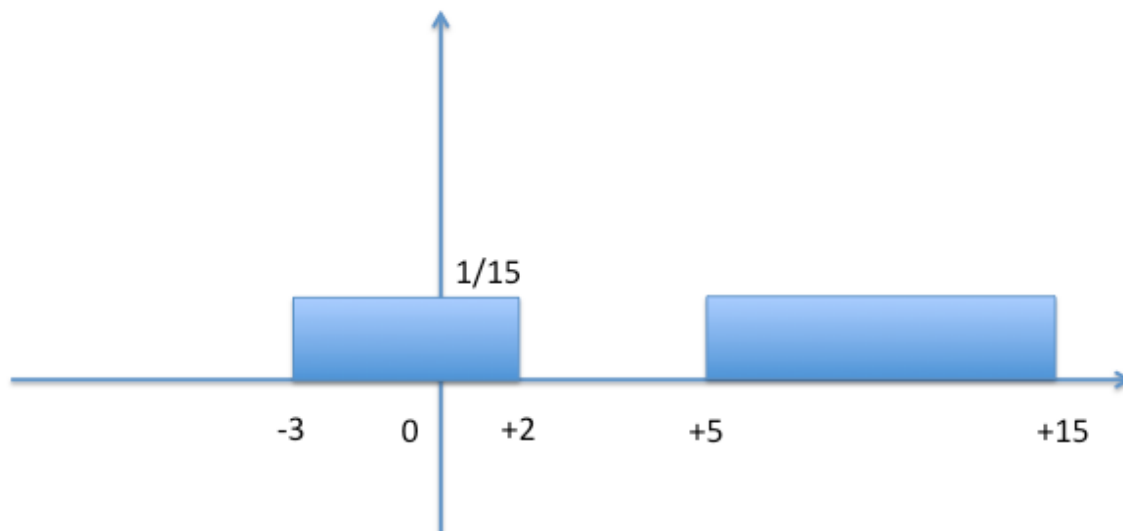
1) sintetizzare una variabile aleatoria  $X$  uniforme negli intervalli  $[-3,+2]$  e  $[+5,+15]$

2) sintetizzare una variabile avente densità di probabilità  $f_X(x) = \frac{1}{x^2} \quad x > 1$

3) sintetizzare una variabile avente densità di probabilità  $f(x)$  indicata nella seguente figura:



- 1) Il supporto della variabile aleatoria che vogliamo sintetizzare è compreso fra -3 e +2 (ampiezza = 5) e tra +5 e +15 (ampiezza uguale a 10). Ecco la distribuzione di probabilità:



Procedo a sintetizzare questa variabile aleatoria “spezzando” il procedimento in due parti: sintetizzo prima la “parte” della distribuzione compresa fra -3 e +2. L’area di questa parte è pari a  $1/3$

Procedo in questo modo: data  $U$  la nostra v.a. Uniforme fra 0 e 1:

- se  $0 \leq U \leq 1/3$  allora moltiplicando per 15 ho  $\rightarrow 15U$  sarà uniforme (“distribuzione “piatta”) compreso fra 0 e +5. Quindi  $15U-3$  sarà sempre uniforme (“piatta”) tra -3 o +2, come desiderato.
- se  $1/3 < U \leq 1$  allora moltiplicando per 15 ho  $\rightarrow 15U$  sarà uniforme (“distribuzione “piatta”) compreso fra +5 e +15, come desiderato.
- Riassumendo, per sintetizzare la nostra v.a., semplicemente porro':  
**se  $0 \leq U \leq 1/3 \rightarrow X=15U-3$**   
**se  $1/3 < U \leq 1 \rightarrow X=15U$**

2) Utilizziamo il metodo del percentile: calcoliamo la funzione di ripartizione  $F(U)$ , che è pari all'integrale

$$F_X(x) = \int_{+1}^x \frac{1}{y^2} dy = \left[ \frac{-1}{y} \right]_{+1}^x = \frac{-1}{x} + 1$$

Ora inverto la  $F_X$  e la applico alla v.a.  $U$ , ovvero:

$$U = \frac{-1}{x} + 1 \text{ da cui } X = \frac{1}{1-U} = \frac{1}{U}$$

3) Procedo a sintetizzare questa variabile aleatoria “spezzando” il procedimento in 3 parti: sintetizzo prima la “parte” della distribuzione compresa fra +1 e +3. L'area di questa parte è pari a  $1/2$ , poi quella tra +3 e +5 (area  $1/4$ ), infine la delta di Dirac (area  $1/4$ ).

Procedo in questo modo: data  $U$  la nostra v.a. Uniforme fra 0 e 1:

- se  $0 \leq U \leq 1/2$  allora moltiplicando per 4 ho  $\rightarrow 4U$  sarà uniforme (“distribuzione “piatta”) compreso fra 0 e +2. Quindi  $4U+1$  sarà sempre uniforme (“piatta”) tra +1 o +3, come desiderato.
- se  $1/2 < U \leq 3/4$  allora moltiplicando per 8 ho  $\rightarrow 8U$  sarà uniforme (“distribuzione “piatta”) compreso fra +4 e +6. Quindi  $8U-1$  sarà sempre uniforme (“piatta”) tra +3 o +5, come desiderato.
- Se  $3/4 < U \leq 1$ , allora pongo  $X = +7$
- Riassumendo, per sintetizzare la nostra v.a., semplicemente porro':  
**se  $0 \leq U \leq 1/2 \rightarrow X=4U+1$**   
**se  $1/2 < U \leq 3/4 \rightarrow X=8U-1$**   
**se  $3/4 < U \leq 1 \rightarrow X=+7$**