Esercizio 1

Si consideri un sistema a code caratterizzato da un servente e da 2 posti in coda. Il servente opera nel seguente modo: ogni volta che il sistema si svuota, il servente si prende un periodo di vacanza, ed attende che siano arrivati in coda almeno 2 pacchetti prima di ricominciare a lavorare; non appena il secondo pacchetto arriva nel sistema, il servente riprende a lavorare regolarmente e continua a smaltire pacchetti fintantoché il sistema non si svuota di nuovo e così via di seguito.

Si supponga che il processo degli arrivi sia Poissoniano con valor medio λ pacchetti/secondo e che il tempo di trasmissione sia una variabile casuale esponenziale negativa con media pari ad $1/\mu$ secondi.

Si calcoli (esprimendolo in forma letterale):
1)Il numero medio di utenti nel sistema
2)Il tempo medio speso nel sistema da un pacchetto
3)La percentuale di tempo in cui il sistema è vuoto.
4)Il traffico medio smaltito dal servente
5)Il coefficiente di utilizzo del servente
6)Il traffico medio perso dal sistema

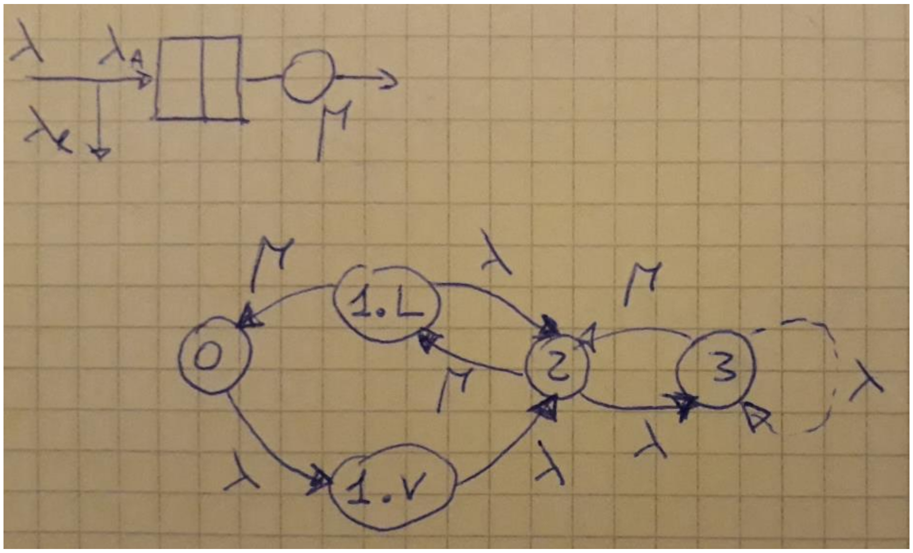
Soluzione:

Anzitutto, il sistema è stabile per ogni valore di λ e di μ in quanto è caratterizzato da una coda finita (in particolare, da una coda con 2 posti).

Descriviamo, tramite una catena di Markov, il sistema in esame.

Stato: numero pacchetti nel sistema (da 0 a 3). Tuttavia lo stato "1" va "suddiviso" in due sottocasi: "1.L" (c'è un pacchetto nel sistema, questo si trova nel servente e il sirvente sta in questo momento Lavorando) e "1.V " (c'è un pacchetto nel sistema, questo si trova nel sirvente e il sirvente è un uquesto momento in Vacanza)

Catena di Markov:



1)Il numero medio di utenti nel sistema

Devo anzitutto calcolare le probabilità di stato stazionarie della catena di Markov qui sopra, che si ottengono semplicemente imponendo l'equilibrio dei flussi al nodo « 0 », al nodo « 1.V », al nodo « 1.L » e al nodo 3 (è più semplice da scrivere), ed infine imponendo che le probabilità stazionarie sommino ad 1. Quindi:

Equilibrio nodo 0: $\lambda p_0 = \mu\, p_{1L}$
Equilibrio nodo 1.V: $\lambda p_0 = \lambda\, p_{1V}$
Equilibrio nodo 1.L: $(\lambda + \mu) p_{1L} = \mu\, p_2$
Equilibrio nodo 3: $\lambda p_2 = \mu\, p_3$

Condizione di normalizzazione: $p_0 + p_{1L} + p_{1V} + p_2 + p_3 = 1$

Definiamo per comodità:
$\rho = \lambda / \mu$

Risulta quindi dalla 1a equazione: $p_{1L} = \rho\, p_0$
Dalla 2a equazione: $p_{1V} = p_0$
Dalla 3a equazione: $p_2 = (1+\rho)\, p_{1L} = (1+\rho)\rho\, p_0$
Dalla 4a equazione: $p_3 = (1+\rho)\, \rho^2\, p_0$

Infine sostituendo nella 5a equazione (di normalizzazione):
$p_0 + p_0 + \rho\, p_0 + (1+\rho)\rho\, p_0 + (1+\rho)\, \rho^2\, p_0 = 1$, ovvero:
$p_0\, (2+\rho + (1+\rho)\rho + (1+\rho)\, \rho^2) = 1$.

Quindi le probabilità di stato stazionarie risultano (in forma letterale) pari a :
$p_0 = 1/ (2+\rho + (1+\rho)\rho + (1+\rho)\, \rho^2)$
$p_{1V} = 1/ (2+\rho + (1+\rho)\rho + (1+\rho)\, \rho^2)$
$p_{1L} = \rho / (2+\rho + (1+\rho)\rho + (1+\rho)\, \rho^2)$

$p_2 = (1+\rho)\rho / (2+\rho + (1+\rho)\rho + (1+\rho)\rho^2)$
$p_3 = (1+\rho)\rho^2 / (2+\rho + (1+\rho)\rho + (1+\rho)\rho^2)$

Quanto vale N, numero medio dei pacchetti nel sistema ? Lo calcolo dalla definizione:
$N=0*p_0+1*p_{1V}+1*p_{1L}+2*p_2+3*p_3=p_{1V}+p_{1L}+2*p_2+3*p_3$

2)Il tempo medio speso nel sistema da un pacchetto
Applico il teorema di Little al nostro sistema. Il teorema dice che il numero medio N di pacchetti nel sistema (che raggiunge sempre uno stato stazionario, peraltro), , è pari al traffico medio *entrante* nel sistema, che indichiamo con $\boldsymbol{\lambda a}$ (diverso da λ) per T, tempo medio speso nel sistema, che vogliamo appunto calcolare.

Quanto vale $\boldsymbol{\lambda a}$? In realtà è calcolabile sapendo che il traffico totale (medio) offerto al sistema, λ, è pari alla somma del traffico totale (medio) entrante, $\boldsymbol{\lambda a}$, più quello (medio) scartato dal sistema, $\boldsymbol{\lambda r}$**,** che è la risposta al punto 6).

Quindi $\boldsymbol{\lambda a} = \lambda - \lambda p_3 = \lambda(1-p_3)$ (si veda la risposta al punto 6) qui sotto) =

N lo abbiamo calcolato al punto precedente :
$N=p_{1V}+p_{1L}+2*p_2+3*p_3$

Quindi : $N = \boldsymbol{\lambda a * T}$
Ovvero: $T= N/\boldsymbol{\lambda a} = (p_{1V}+p_{1L}+2*p_2+3*p_3) / (\lambda(1-p_3))$

3)La percentuale di tempo in cui il sistema è vuoto.
Ovviamente questo è pari a p_0

4)Il traffico medio smaltito dal servente
Il traffico (medio) che entra nel sistema è quello che poi esce dal sistema, ovvero viene smaltito. Per cui la risposta a questa domanda è: traffico medio smaltito dal Sistema = $\boldsymbol{\lambda a} = \lambda(1-p_3)$

5)Il coefficiente di utilizzo del servente
Si tratta della frazione di tempo in cui il servente lavora. Ora, il servente lavora in tutti gli stati tranne che nello stato « 0 » ma anche nello stato « 1.V ». Quindi :
Coefficiente di utilizzo del servente = $1-(p_0+p_{1V})$

6)Il traffico medio perso dal sistema
Lo abbiamo già scritto nel punto precedente (punto 3), il traffico medio perso dal Sistema è pari a λp_3