

Esercizio 2 (Preappello - 15 Giugno 2010)

Si consideri una connessione ottica che viene trasmessa su un cammino (path) lungo 500 km. Questo cammino è soggetto a guasti (failures) che vengono stimati essere in media pari a 5 failures/anno/1000 km (ovvero, 5 failures per anno ogni 1000 km di fibra). Il tempo medio di riparazione di un guasto (Mean Time To Repair, MTTR) risulta pari in media a 24 ore. La connessione richiede un'availability non inferiore al 99.99%.

1) Si determini l'availability media di tale connessione, e si indichi inoltre se il livello di affidabilità richiesto viene rispettato oppure no.

2) Nel caso in cui si sia risposto al punto precedente che tale connessione non rispetta il proprio livello di affidabilità richiesto, si supponga ora di voler rispettare tale livello utilizzando la seguente soluzione: proteggere la connessione in modo dedicato (1:1), con un cammino di backup di uguale lunghezza e link-disjoint rispetto al cammino della connessione principale.

Si determini qual è l'availability media ottenuta per la connessione utilizzando tale soluzione. Si indichi inoltre se il livello di affidabilità per tale connessione viene ora rispettato oppure no.

Soluzione:

In questo caso ho un cammino soggetto a 5 guasti (failures) all'anno ogni 1000 km. La nostra connessione è lunga però 500km, quindi sarà soggetta a 2.5 failures/anno.

Un anno è composto da $365 \cdot 24 = 8760$ ore.

Quindi avremo 2.5 failures ogni 8760 ore, ovvero in media il Mean Time To Failure (tempo medio tra un guasto ed il successivo) sarà pari a $8760 / 2.5 = 3504$ ore.

Il MTTR è dato dal testo del problema: 24 ore

Riassumendo:

MTTF = 3504 ore

MTTR = 24 ore

Domanda 1) L'affidabilità (availability) media della connessione, A, ovvero la risposta alla domanda numero 1) è data da:

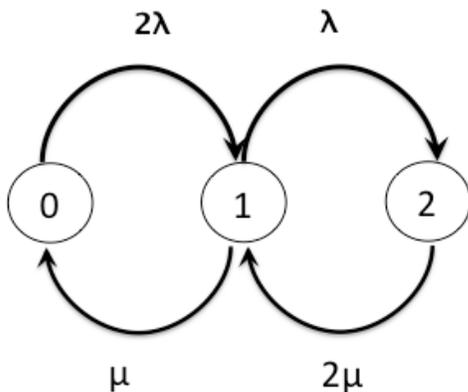
$$A = \text{MTTF} / (\text{MTTF} + \text{MTTR}) = 3504 / (3504 + 24) = 3504 / 3528 = \underline{\underline{0.9932, \text{ ovvero } 99.32\%}}$$

Quindi: il livello di affidabilità richiesto (99.99%) **NON** viene rispettato.

Domanda 2) Nel caso di protezione 1:1, ho un cammino di protezione dedicato, che protegge appunto il mio cammino (connessione) principale.

Utilizziamo il modello illustrato nella serie di lucidi sulla protezione delle reti di telecomunicazione

(https://cs.unibg.it/martignon/documenti/reti/Seminario_WDM_protection.pdf), in particolare le slide 18 e 19 (“Analysis of 1:N protection without Service Differentiation”). Nel nostro caso la catena di Markov risulta essere la seguente, molto semplice:



Nella catena qui sopra, lo stato rappresenta il numero di connessioni (senza distinzione tra la connessione principale e quella di backup) che sono guaste, ed è ovviamente compreso tra 0 (nessun guasto) e 2 (entrambe guaste).

$$\lambda = 1/\text{MTTF} = 1/3504 \text{ (ore}^{-1}\text{)}$$

$$\mu = 1/\text{MTTR} = 1/24 \text{ (ore}^{-1}\text{)}$$

Definiamo per comodità:

$$\rho = \lambda / \mu = 24/3504 = 0.006849315$$

Le probabilità di stato stazionarie della catena di Markov qui sopra si ottengono semplicemente imponendo l'equilibrio dei flussi al nodo 0, e quindi al nodo 2 (è più semplice da scrivere), ed infine imponendo che le probabilità stazionarie sommino ad 1. Quindi:

$$\text{Equilibrio nodo 0: } 2\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$\text{Equilibrio nodo 2: } \lambda p_1 = 2\mu p_2$$

$$\text{Condizione di normalizzazione: } p_0 + p_1 + p_2 = 1$$

$$\text{Risulta quindi dalla 1a equazione: } p_1 = 2(\lambda / \mu) p_0 = 2\rho p_0$$

$$\text{Dalla 2a equazione: } p_2 = (\lambda / 2\mu) p_1 = (\rho/2) p_1 = \rho^2 p_0$$

$$\text{Infine sostituendo nella 3a equazione: } p_0 + 2\rho p_0 + \rho^2 p_0 = 1, \text{ ovvero: } p_0 (1 + \rho)^2 = 1$$

Quindi:

$$p_0 = 1 / (1+\rho)^2$$

$$p_1 = 2\rho / (1+\rho)^2$$

$$p_2 = \rho^2 / (1+\rho)^2$$

L'unavailability media (si veda equazione di slide 19), che indicheremo con $U_{1:1}$, si calcola come segue, tenendo conto che nel nostro caso $N = 1$ (protezione 1:1)

$$U(N, \lambda, \mu) = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{(n-1)}{N} p(n)$$

↓

- Nello stato n , per $n \geq 2$, ci sono infatti $(n-1)$ connessioni non protette sul totale delle N connessioni
- La probabilità che, nello stato n , una connessione scelta a caso fra le N sia proprio tra le $(n-1)$ non protette è data dal rapporto $(n-1)/N$

Quindi nel nostro caso $U_{1:1} = p_2$. Del resto è ovvio: l'unico stato in cui la connessione principale NON risulta protetta è proprio quando entrambe le connessioni (principale e di backup) sono guaste, ovvero lo stato "2", che si verifica con probabilità p_2 .

Di conseguenza l'affidabilità media del nostro sistema di protezione 1:1, che indichiamo come $A_{1:1}$, sarà data da $A_{1:1} = 1 - U_{1:1}$.

Numericamente $U_{1:1} = p_2 = 4.627701421 \cdot 10^{-5}$

Quindi: $A_{1:1} = 1 - U_{1:1} = \mathbf{0.9999537}$, che è la risposta alla nostra domanda numero 2).
Ovvero 99.99537%

Chiaramente adesso il livello di affidabilità media è rispettato.

Nota: in questo caso molto semplice (due sole connessioni, una primaria e una di backup) si può anche ragionare semplicemente partendo dalla risposta al punto 1. Abbiamo infatti due connessioni (la principale e quella di backup), identiche, caratterizzate ciascuna da una affidabilità $A = \text{MTTF} / (\text{MTTF} + \text{MTTR}) = 3504 / (3504 + 24) = 3504 / 3528 = \mathbf{0.9932}$

Ma allora, l'unavailability (probabilità di guasto) per ciascuna di esse risulta pari a $1-A$, e la probabilità che entrambe siano guaste contemporaneamente risulta (si tratta di eventi disgiunti): $(1-A) * (1-A) = (1-A)^2$

Quindi l'affidabilità del nostro sistema 1:1, $A_{1:1}$, è calcolabile come :

$$A_{1:1} = 1 - (1-A)^2 = 1 - (1-0.9932)^2 = \mathbf{0.9999537}$$