Esercizio 1

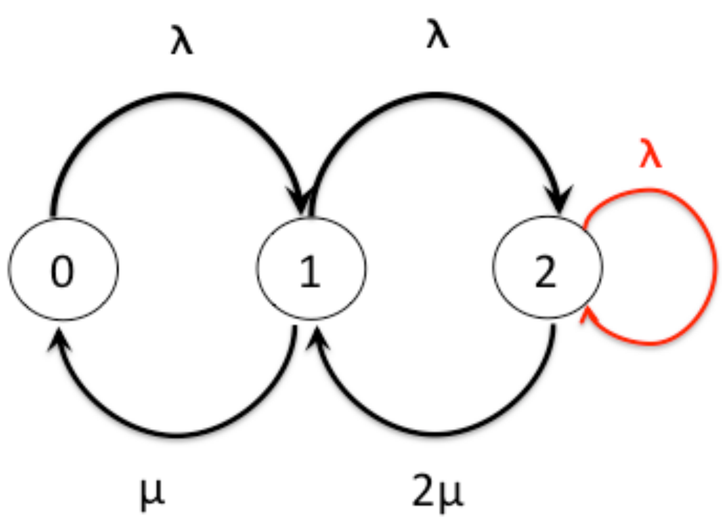
Si consideri un sistema a code caratterizzato da due serventi e nessun posto in coda. Si supponga che il processo degli arrivi sia Poissoniano con valor medio λ pacchetti/secondo e che il tempo di trasmissione sia una variabile casuale esponenziale negativa con media pari ad $1/\mu$ secondi, indipendentemente dal servente utilizzato.

1) Si indichi per quali valori di λ (fissato μ) il sistema è stabile, ovvero raggiunge uno stato stazionario.

Il sistema è stabile per ogni valore di λ e di μ in quanto è caratterizzato da una coda finita (in particolare, da una coda addirittura nulla).

2) Si descriva, tramite una catena di Markov, il sistema in esame.

Stato: numero pacchetti nel sistema (da 0 a 2).
Catena di Markov:



Si consideri quindi il caso $\lambda = \mu/2$. In questa ipotesi:
3) Si calcoli la distribuzione stazionaria del numero di pacchetti nel sistema.

Le probabilità di stato stazionarie della catena di Markov qui sopra si ottengono semplicemente imponendo l'equilibrio dei flussi al nodo 0, quindi al nodo 2 (è più semplice da scrivere), ed infine imponendo che le probabilità stazionarie sommino ad 1. Quindi:

Equilibrio nodo 0: $\lambda p_0 = \mu\, p_1$
Equilibrio nodà 2: $\lambda p_1 = 2\mu\, p_2$
Condizione di normalizzazione: $p_0 + p_1 + p_2 = 1$

Definiamo per comodità:
$\rho = \lambda / \mu$

Risulta quindi dalla 1a equazione: $p_1 = \rho \, p_0$
Dalla 2a equazione: $p_2 = (\rho/2)\, p_1 = (\rho^2 /2) p_0$

Infine sostituendo nella 3a equazione: $p_0 + \rho \, p_0 + (\rho^2 /2)\, p_0 = 1$, ovvero:
$p_0 \, (1+\rho + \rho^2/2)= 1$.

Quindi le probabilità di stato stazionarie risultano (in forma letterale) pari a :
$p_0 = 1/ (1+\rho + \rho^2/2)$
$p_1 = \rho / (1+\rho + \rho^2/2)$
$p_2 = (\rho^2 /2) / (1+\rho + \rho^2/2)$

Essendo $\lambda = \mu/2$ risulta $\rho = ½$

Quindi:
$p_0 = 1/ (1+1/2 + 1/8) = 1/((8+4+1)/8)=$ **8/13**
$p_1 = \rho / (1+\rho + \rho^2/2) =$ **4/13**
$p_2 = (\rho^2 /2) / (1+\rho + \rho^2/2) =$ **1/13**

4)Si determini il numero medio di pacchetti nel sistema
Dalla definzione di numero medio di pacchetti nel sistema, che chiamero' N:
$N=0^* \, p_0 +1^* \, p_1+2^* \, p_2= p_1+2^* \, p_2 =4/13+2/13 =$ **6/13**

5)Si determini il tempo medio totale di permanenza dei pacchetti che entrano nel sistema

Esistono 2 modi per rispondere a questa domanda. Il primo (suggerito peraltro dalla domanda successive al punto 8)) è il più semplice: visto che non c'è nessun posto in coda, se un pacchetto entra nel sistema entra ovviamente subito in uno dei 2 serventi. Il tempo speso in coda (che peraltro è nulla, ovvero non esiste) è dunque, ovviamente, pari a zero, mentre quello medio speso nel servente è pari a $1/\mu$ secondi, indipendentemente dal servente utilizzato, come detto dal testo dell'esercizio.
Quindi la risposta è, ovviamente, $\mathbf{T = 1/\mu}$

Il secondo modo consiste nell'applicare il teorema di Little al nostro sistema. Il teorema dice che il numero medio N di pacchetti nel sistema (che raggiunge sempre uno stato stazionario, peraltro), e che abbiamo già calcolato al punto 4), è pari al traffico medio *entrante* nel sistema, che indichiamo con $\boldsymbol{\lambda}$**a** (diverso da λ) per T, tempo medio speso nel sistema, che vogliamo appunto calcolare.

Quanto vale **λa** ? In realtà è calcolabile sapendo che il traffic totale (medio) offerto al sistema, λ , è pari alla somma del traffico totale (medio) entrante, **λa**, più quello (medio) scartato dal sistema, **λr,** che è la risposta al punto 7).

Quindi **λa =** $\lambda - \lambda r$ = (si veda la risposta al punto 7) qui sotto) = $\lambda - \lambda/13 = 12\lambda/13$

Quindi : N = **λa * T**
Ovvero: T= N/ **λa** = (**6/13) /(**12 λ /13)=**6/**12 λ = 1/2 λ
Ma essendo $\lambda = \mu/2$ -> T= 1/2 λ =**1/ μ**
Che è ovviamente identica alla risposta ottenuta col metodo 1.

6)Si determini il tempo medio di attesa in coda dei pacchetti che entrano nel sistema

E' ovviamente zero, non essendoci alcun posto in coda.

7)Si determini il rate medio dei pacchetti scartati dal sistema
λr su calcola semplicemente guardando la catena di Markov: l'unico stato in cui perdo traffico/pacchetti è lo stato 2 (che è lo stato di blocco, ovvero tutti e 2 i posti nel sistema, ovvero nei 2 serventi, sono occupati). In quello stato (si veda la freccia rossa), il sistema si vede sempre offerti λ pacchetti al secondo, in media, che vengono persi. Dunque il traffico medio perso è pari proprio a λ per la probabilità di trovarsi nello stato 2, p_2

λr = $\lambda p_2 = \lambda/13$

8) Era possibile rispondere ai punti 5 e 6 senza fare nessun calcolo? Se si, perché? Certamente si, lo abbiamo fatto proprio nel modo 1 di risoluzione del punto 5) (si veda appunto la risposta a quell punto).