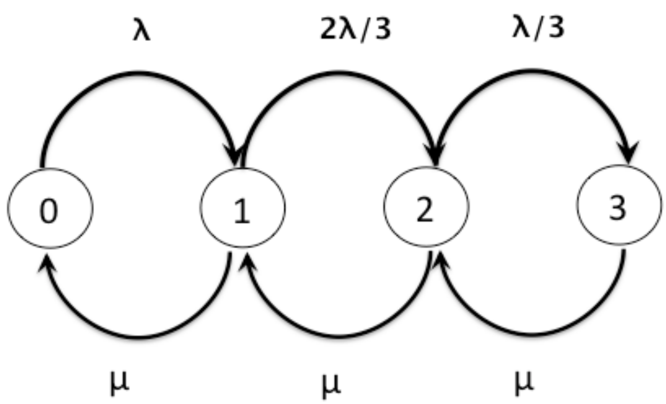
<u>Esercizio 1 – 29 Giugno 2005</u>

Si consideri un sistema a code caratterizzato da un servente e da 2 posti in coda. Si supponga che il processo degli arrivi sia Poissoniano con valor medio λ pacchetti/secondo e che il tempo di trasmissione sia una variabile casuale esponenziale negativa con media pari ad $1/\mu$ secondi. Un pacchetto offerto al sistema che trova già n pacchetti presenti nel sistema viene immediatamente scartato (senza entrare nel sistema) con probabilità pari a $q_n = n/3$, mentre entra nel sistema con probabilità $1-q_n$.

1) Si descriva, tramite una catena di Markov, il sistema in esame
Il sistema è sempre stabile (ovvero, raggiunge uno stato stazionario) per ogni valore di λ e μ essendo caratterizzato da una coda finita.

Stato: numero pacchetti nel sistema (da 0 a 3).
Catena di Markov:



2) Si calcoli, in forma letterale, la distribuzione stazionaria del numero di pacchetti nel sistema

Le probabilità di stato stazionarie della catena di Markov qui sopra si ottengono semplicemente imponendo l'equilibrio dei flussi al nodo 0, quindi all'insieme dei nodi (0-1), al nodo 3 (è più semplice da scrivere), ed infine imponendo che le probabilità stazionarie sommino ad 1. Quindi:

Equilibrio nodo 0: $\lambda p_0 = \mu\, p_1$
Equilibrio nodo (0-1): $(2\lambda/3)p_1 = \mu\, p_2$
Equilibrio nodo 3: $(\lambda/3)p_2 = \mu\, p_3$

Condizione di normalizzazione: $p_0+p_1+p_2+p_3 = 1$

Definiamo per comodità:
$\rho = \lambda/\mu$

Risulta quindi dalla 1a equazione: $p_1 = \rho\, p_0$
Dalla 2a equazione: $p_2 = (2\rho/3)\, p_1 = (2\rho^2/3)p_0$
Dalla 3a equazione: $p_3 = (\rho/3)\, p_2 = (2\rho^3/9)p_0$

Infine sostituendo nella 3a equazione: $p_0+\rho\, p_0+ (2\rho^2/3)\, p_0 +(2\rho^3/9)p_0 =1$, ovvero:

$$p_0\, (1+\rho + 2\rho^2/3+2\rho^3/9)= 1.$$

Quindi le probabilità di stato stazionarie risultano pari a :
$p_0 = 1/ (1+\rho + 2\rho^2/3+2\rho^3/9)$
$p_1 = \rho / (1+\rho + 2\rho^2/3+2\rho^3/9)$
$p_2 = (2\rho^2 /3) / (1+\rho + 2\rho^2/3+2\rho^3/9)$
$p_3 = (2\rho^3 /9) /(1+\rho + 2\rho^2/3+2\rho^3/9)$

3) Si determini il numero medio di pacchetti nel sistema
Dalla definzione di numero medio di pacchetti nel sistema, che chiamero' N:
$N=0^* p_0 +1^* p_1+2^* p_2+3^* p_3 = p_1+2^* p_2+3^* p_3 = \rho / (1+\rho + 2\rho^2/3+2\rho^3/9) +2^*(2\rho^2 /3) / (1+\rho + 2\rho^2/3+2\rho^3/9)+ 3^* (2\rho^3 /9) /(1+\rho + 2\rho^2/3+2\rho^3/9)=$
$(\rho+ 4\rho^2 /3 + 2\rho^3 /3)/ (1+\rho + 2\rho^2/3+2\rho^3/9)$

4) Si determini il tempo medio di attesa in coda dei pacchetti che entrano nel sistema

Possiamo calcolare W in due modi. Il primo è il più semplice:
$W= T - 1/ \mu$
dove T è la risposta al punto 5).

In alternativa: applichiamo il teorema di Little al sottosistema "coda", ovvero:
$Nq = \boldsymbol{\lambda a * W}$

λa lo calcoliamo come $\lambda - \lambda r$ (λr, traffic medio rifiutato, lo calcoliamo al punto 6)

Nq lo calcoliamo dalla definizione :

$Nq = 1^* p_2+2^* p_3$
Quindi:
$W= Nq/\lambda a = (p_2+2^* p_3) / (\lambda - \lambda r)$

5) Si determini il tempo medio totale di permanenza dei pacchetti che entrano nel sistema

Applichiamo il teorema di Little al nostro sistema. Il teorema dice che il numero medio N di pacchetti nel sistema (che raggiunge sempre uno stato stazionario, peraltro), e che abbiamo già calcolato al punto 3), è pari al traffico medio *entrante* nel sistema, che indichiamo con **λa** (diverso da λ) per T, tempo medio speso nel sistema, che vogliamo appunto calcolare.
Quanto vale **λa** ? In realtà è calcolabile sapendo che il traffico totale (medio) offerto al sistema, λ, è pari alla somma del traffico totale (medio) entrante, **λa**, più quello (medio) scartato dal sistema, **λr,** che è la risposta al punto 6).

Quindi **λa =** $\lambda - \lambda r$ = (si veda la risposta al punto 6) qui sotto)

Quindi : $N = \lambda a * T$

Ovvero: $T = N / \lambda a = (p_1 + 2 * p_2 + 3 * p_3)/(\lambda - \lambda r)$

6)Si determini il rate medio di pacchetti scartati dal sistema

Dal testo dell'esercizio, risulta:

$\lambda r = (\lambda/3)p_1 + (2\lambda/3)p_2 + \lambda p_3$