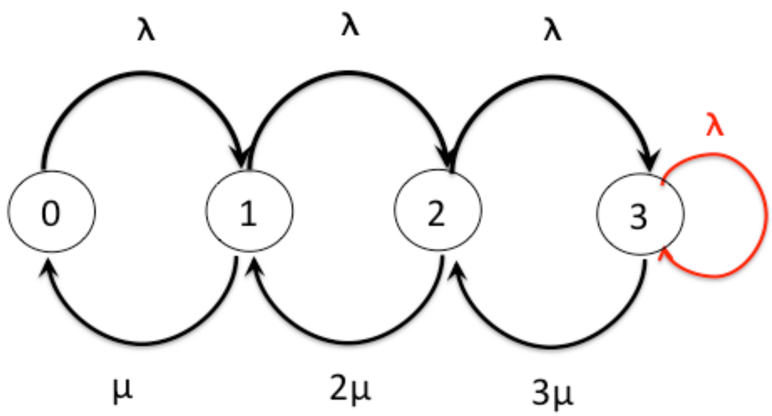
Esercizio 1 – 28 Maggio 2009

Si consideri un sistema a code caratterizzato da tre serventi e nessun posto in coda. Si supponga che il processo degli arrivi sia Poissoniano con valor medio λ pacchetti/secondo e che il tempo di trasmissione sia una variabile casuale esponenziale negativa con media pari ad $1/\mu$ secondi, indipendentemente dal servente utilizzato.

1)Si indichi per quali valori di λ (fissato μ) il sistema è stabile, ovvero raggiunge uno stato stazionario.

Il sistema è stabile per ogni valore di λ e di μ in quanto è caratterizzato da una coda finita (in particolare, da una coda nulla).

2)Si descriva, tramite una catena di Markov, il sistema in esame.
Stato: numero pacchetti nel sistema (da 0 a 3).
Catena di Markov:



Si consideri quindi il caso $\lambda = \mu$. In questa ipotesi:

3)Si calcoli la distribuzione stazionaria del numero di pacchetti nel sistema.

Le probabilità di stato stazionarie della catena di Markov qui sopra si ottengono semplicemente imponendo l'equilibrio dei flussi al nodo 0, quindi all'insieme dei nodi (0-1), al nodo 3 (è più semplice da scrivere), ed infine imponendo che le probabilità stazionarie sommino ad 1. Quindi:

Equilibrio nodo 0: $\lambda p_0 = \mu\, p_1$
Equilibrio nodo (0-1): $\lambda p_1 = 2\mu\, p_2$
Equilibrio nodo 3: $\lambda p_2 = 3\mu\, p_3$

Condizione di normalizzazione: $p_0+p_1+p_2+p_3 = 1$

Definiamo per comodità:
$\rho = \lambda / \mu = 1$ (nel nostro caso).

Risulta quindi dalla 1a equazione: $p_1 = \rho\, p_0$
Dalla 2a equazione: $p_2 = (\rho/2)\, p_1 = (\rho^2/2) p_0$
Dalla 3a equazione: $p_3 = (\rho/3)\, p_2 = (\rho^3/6) p_0$

Infine sostituendo nella 3a equazione: $p_0 + \rho\, p_0 + (\rho^2/2)\, p_0 + (\rho^3/6) p_0 = 1$, ovvero:

$$p_0\,(1 + \rho + \rho^2/2 + \rho^3/6) = 1.$$

Quindi le probabilità di stato stazionarie risultano (essendo $\rho = 1$) pari a :
$p_0 = 1/(1+1+½+1/6) =$ **3/8**
$p_1 = p_0 =$ **3/8**
$p_2 = (1/2)\, p_0 =$ **3/16**
$p_3 = 1/6 p_0 =$ **1/16**

4) Si calcoli la probabilità di blocco del sistema.
La probabilità di blocco del sistema è pari alla probabilità di trovarsi nello stato (3), ovvero P(blocco)= $p_3 =$ **1/16**

5) Si determini il numero medio di pacchetti nel sistema
Dalla defínzione di numero medio di pacchetti nel sistema, che chiamero' N:
$N = 0 * p_0 + 1 * p_1 + 2 * p_2 + 3 * p_3 = p_1 + 2 * p_2 + 3 * p_3 = 3/8 + 2*3/16 + 3/16 =$ **15/16**

6) Si determini il tempo medio totale di permanenza dei pacchetti che entrano nel sistema
Certamente, il sistema ha zero posti in coda e 3 serventi tutti di pare velocità μ. I pacchetti che riescono ad entrare nel sistema NON fanno dunque mai coda (W=0) e il loro tempo di permanenza totale nel sistema, T, coincide con il tempo medio di servizio, che è appunto sempre pari a $1/\mu$ indipendentemente dal servente utilizzato.
T=1/μ

7) Si determini il tempo medio di attesa in coda dei pacchetti che entrano nel sistema
Il sistema ha zero posti in coda. I pacchetti che riescono ad entrare nel sistema NON fanno dunque mai coda, dunque:
W=0.

8) Si determini il rate medio dei pacchetti scartati dal sistema
λr su calcola semplicemente guardando la catena di Markov: l'unico stato in cui perdo traffico/pacchetti è lo stato 3 (che è lo stato di blocco, ovvero tutti e 3 i posti nel sistema, ovvero nei 3 serventi). In quello stato (si veda la freccia rossa), il sistema si vede sempre offerti λ pacchetti al secondo, in media, che vengono persi. Dunque il traffico medio perso è pari proprio a λ per la probabilità di trovarsi nello stato 3, p_3

$\lambda r = \lambda p_3 = \lambda /16$

9) Era possibile rispondere ai punti 6 e 7 senza fare nessun calcolo? Se si, perché?
Certamente, il sistema ha zero posti in coda e 3 serventi tutti di pare velocità μ.
I pacchetti che riescono ad entrare nel sistema NON fanno dunque mai coda (W=0) e il loro tempo di permanenza totale nel sistema coincide con il tempo medio di servizio, che è appunto sempre pari a $1/\mu$ indipendentemente dal servente utilizzato.