Esercizio 1 – 28 Maggio 2008

Esercizio 1

Si consideri un sistema a code caratterizzato da due serventi (S1 ed S2) e nessun posto in coda.
Si supponga che il processo degli arrivi sia Poissoniano con valor medio λ pacchetti/secondo.
Il tempo di trasmissione di un pacchetto servito dal servente S1 è una variabile casuale esponenziale negativa con media pari ad $1/\mu_1$ secondi, mentre il tempo di trasmissione di un pacchetto servito dal servente S2 è una variabile casuale esponenziale negativa con media pari ad $1/\mu_2$ secondi. Inoltre sia $\mu_1 > \mu_2$. Quando un pacchetto arriva nel sistema e trova entrambi i serventi liberi, sceglie il più veloce.

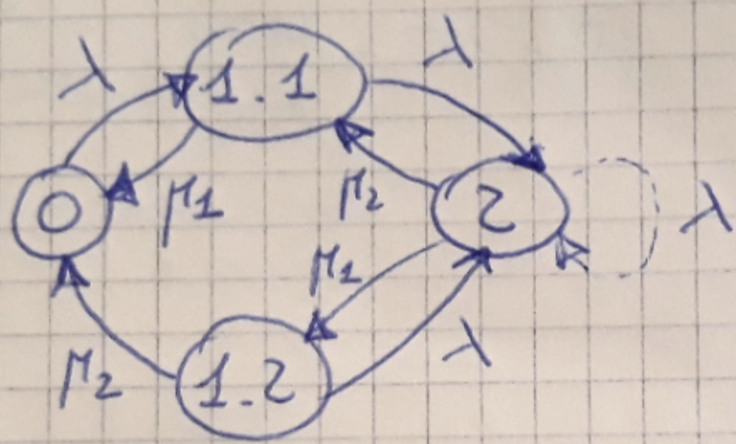
1)Si indichi per quali valori di λ, μ_1 e μ_2 il sistema è stabile, ovvero raggiunge uno stato stazionario.
2)Si descriva, tramite una catena di Markov, il sistema in esame.

Si consideri quindi il caso $\mu_1 = 2\mu_2$ e $\lambda = \mu_2$. In questa ipotesi:
3)Si calcolino, in forma numerica, le probabilità di stato stazionarie.
4)Si calcoli la probabilità di blocco del sistema
5)Si calcoli il numero medio di pacchetti nel sistema
6)Si calcoli il tempo medio speso nel sistema da un pacchetto.

Soluzione:
1) Il sistema è sempre stabile (ovvero, raggiunge uno stato stazionario) per ogni valore di λ, μ1 e μ2 essendo caratterizzato da una coda finite (pari a nessuno posto in coda).

2) Si descriva, tramite una catena di Markov, il sistema in esame, specificando con precisione gli stati introdotti e le transizioni tra tali stati.

Stato: numero pacchetti nel sistema (da 0 a 2), ma per lo stato 1 specifichiamo se il pacchetto si trova nel servente 1 (stato 1.1) o nel servente 2 (stato 1.2)
Ecco la Catena di Markov e le 4 equazioni (3 di equilibrio di flusso + la condizione di normalizzazione) per determinare le probabilità stazionarie:



Eq. nodo ϕ: $\lambda p_0 = \mu_1 p_{11} + \mu_2 p_{12}$

Eq. nodo 1.2: $(\lambda + \mu_2) p_{12} = \mu_1 p_2$

Eq. nodo 2: $\lambda (p_{11} + p_{12}) = (\mu_1 + \mu_2) p_2$

Infine: $p_0 + p_{11} + p_{12} + p_2 = 1$.

3) Per calcolare in forma numerica le probabilità stazionaria basta risolvere il sistema qui sopra. Sostituendo $\mu 1 = 2 * \mu 2$ e $\lambda = \mu 2$ risulta:

Risulta quindi dalla 1a equazione: $p_0=2p_{11} + p_{12}$
Dalla 2a equazione: $p_{12} = p_2$
Dalla 3a equazione: $p_{11}+ p_{12}= 3p_2$
Infine: $p_0 +p_{11}+p_{12}+p_2=1$

Con un passaggio e qualche sostituzione (esprimo tutto in funzione di p_2):
Risulta quindi dalla 1a equazione: $p_0=5p_2$
Dalla 2a equazione: $p_{12} = p_2$
Dalla 3a equazione: $p_{11}= 2p_2$
Infine: $5p_2 +2p_2+p_2+p_2=1$, da cui $p_2=1/9$

Quindi:
$\mathbf{p_0=5/9}$

p_{11}=2/9
p_{12}=1/9
p_2=1/9

4) La probabilità di blocco del sistema è pari a **p_2=1/9**

5) il numero medio di pacchetti nel sistema è pari
$N= 0^* p_0 +1^*p_{11}+1^*p_{12}+2^*p_2=2/9+1/9+2/9 =$ **5/9**

6) Applichiamo il teorema di Little al nostro sistema. Il teorema dice che il numero medio N di pacchetti nel sistema (che raggiunge sempre uno stato stazionario, peraltro), e che abbiamo già calcolato al punto 5), è pari al traffico medio *entrante* nel sistema, che indichiamo con **λa** (diverso da λ) per T, tempo medio speso nel sistema, che vogliamo appunto calcolare.
Quanto vale **λa** ? In realtà è calcolabile sapendo che il traffico totale (medio) offerto al sistema, λ, è pari alla somma del traffico totale (medio) entrante, **λa**, più quello (medio) scartato dal sistema, **λr,** che è pari a **λ* p_2**).

Quindi **λa =** λ - λr = λ (1- p_2)=8 λ /9

Quindi : N = **λa * T**
Ovvero: T= N/ **λa** = (5/9)/(8 λ /9) =5/(8 λ)