Esercizio 1 - 15 Giugno 2010

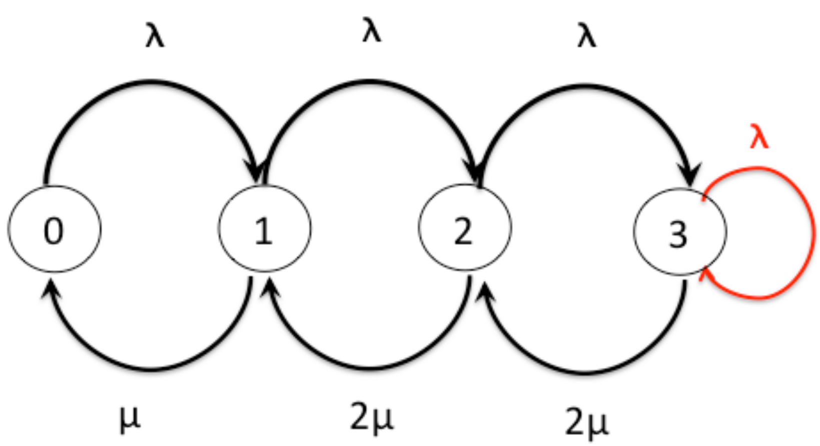
Si consideri un sistema a code caratterizzato da due serventi ed un posto in coda. Si supponga che il processo degli arrivi sia Poissoniano con valor medio λ pacchetti/secondo e che il tempo di trasmissione sia una variabile casual esponenziale negativa con media pari ad $1/\mu$ secondi, indipendentemente dal servente utilizzato.

1)Si indichi per quali valori di λ (fissato μ) il sistema è stabile, ovvero raggiunge uno stato stazionario.

Il sistema è stabile per ogni valore di λ e di μ in quanto è caratterizzato da una coda finita (in particolare, da una coda costituita da un posto).

2)Si descriva, tramite una catena di Markov, il sistema in esame.

Stato: numero pacchetti nel sistema (da 0 a 3).
Catena di Markov:



Si consideri quindi il caso $\lambda = \mu$. In questa ipotesi:
3)Si calcoli la distribuzione stazionaria del numero di pacchetti nel sistema.

Le probabilità di stato stazionarie della catena di Markov qui sopra si ottengono semplicemente imponendo l'equilibrio dei flussi al nodo 0, quindi all'insieme dei nodi (0-1), al nodo 3 (è più semplice da scrivere), ed infine imponendo che le probabilità stazionarie sommino ad 1. Quindi:

Equilibrio nodo 0: $\lambda p_0 = \mu\, p_1$
Equilibrio nodo (0-1): $\lambda p_1 = 2\mu\, p_2$
Equilibrio nodo 3: $\lambda p_2 = 2\mu\, p_3$

Condizione di normalizzazione: $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Definiamo per comodità:
$\rho = \lambda / \mu = 1$ (nel nostro caso).

Risulta quindi dalla 1a equazione: $p_1 = \rho\, p_0$
Dalla 2a equazione: $p_2 = (\rho/2)\, p_1 = (\rho^2 /2)p_0$
Dalla 3a equazione: $p_3 = (\rho/2)\, p_2 = (\rho^3 /4)p_0$

Infine sostituendo nella 3a equazione: $p_0+\rho\, p_0+ (\rho^2 /2)\, p_0 +(\rho^3 /4)p_0 =1$, ovvero:

$$p_0\, (1+\rho + \rho^2/2+\rho^3 /4)= 1.$$

Quindi le probabilità di stato stazionarie risultano (essendo $\rho = 1$) pari a :
$p_0 = 1/ (1+1+ ½+1/4) =$ **4/11**
$p_1 = p_0 =$ **4/11**
$p_2 = (1/2)\, p_0 =$**2/11**
$p_3 = 1/4p_0 =$ **1/11**

4)Si calcoli la probabilità di blocco del sistema.

La probabilità di blocco del sistema è pari alla probabilità di trovarsi nello stato (3), ovvero P(blocco)= $p_3 =$ **1/11**

5)Si determini il numero medio di pacchetti nel sistema
Dalla defnizione di numero medio di pacchetti nel sistema, che chiamero' N:
$N=0^*\, p_0 +1^*\, p_1+2^*\, p_2+3^*\, p_3= p_1+2^*\, p_2 +3^*\, p_3=4/11+2^*2/11+3/11 =$ **1**

6)Si determini il tempo medio totale di permanenza dei pacchetti che entrano nel sistema

Applichiamo il teorema di Little al nostro sistema. Il teorema dice che il numero medio N di pacchetti nel sistema (che raggiunge sempre uno stato stazionario, peraltro), e che abbiamo già calcolato al punto 5), è pari al traffico medio *entrante* nel sistema, che indichiamo con **λa** (<u>diverso da λ</u>) per T, tempo medio speso nel sistema, che vogliamo appunto calcolare.
Quanto vale **λa** ? In realtà è calcolabile sapendo che il traffic totale (medio) offerto al sistema, λ , è pari alla somma del traffico totale (medio) entrante, **λa**, più quello (medio) scartato dal sistema, **λr,** che è la risposta al punto 8).

Quindi **λa =** λ - λr = (si veda la risposta al punto 8) qui sotto) = $\lambda - \lambda /11 = 10 \lambda /11$

Quindi : N = **λa * T**
Ovvero: T= N/ **λa** = **1 /(**$10 \lambda /11$)=**11/**10λ (che è anche uguale a **11/**10 **μ**)

7)Si determini il tempo medio di attesa in coda dei pacchetti che entrano nel sistema

Possiamo calcolare W in due modi. Il primo è il più semplice:
$W = T - 1/\mu = 11/10\mu - 1/\mu = 1/10\mu$

In alternativa: applichiamo il teorema di Little al sottosistema "coda", ovvero:
$N_q = \boldsymbol{\lambda_a * W}$

λ_a l'abbiamo già calcolata in precedenza come $\lambda - \lambda_r = 10\lambda/11$

Nq lo calcoliamo dalla definizione :

$N_q = 1 * p_3 = 1/11$ (solo nello stato 3 ho un pacchetto in coda)
Quindi:
$W = N_q/\lambda_a = (1/11)/(10\lambda/11) = 1/10\lambda = 1/10\mu$

8)Si determini il rate medio dei pacchetti scartati dal sistema
$\boldsymbol{\lambda_r}$ su calcola semplicemente guardando la catena di Markov: l'unico stato in cui perdo traffico/pacchetti è lo stato 3 (che è lo stato di blocco, ovvero tutti e 3 i posti nel sistema, ovvero nei 2 serventi + quello in coda, sono occupati). In quello stato (si veda la freccia rossa), il sistema si vede sempre offerti λ pacchetti al secondo, in media, che vengono persi. Dunque il traffico medio perso è pari proprio a λ per la probabilità di trovarsi nello stato 3, p_3

$\boldsymbol{\lambda_r =} \lambda p_3 = \lambda/11$