Tempo a disposizione per lo svolgimento: 1 ora e 20 minuti (1h30 per 9 CFU)
Avvertenza: Si ricordi di indicare su **ogni singolo foglio consegnato** nome, cognome e numero di matricola

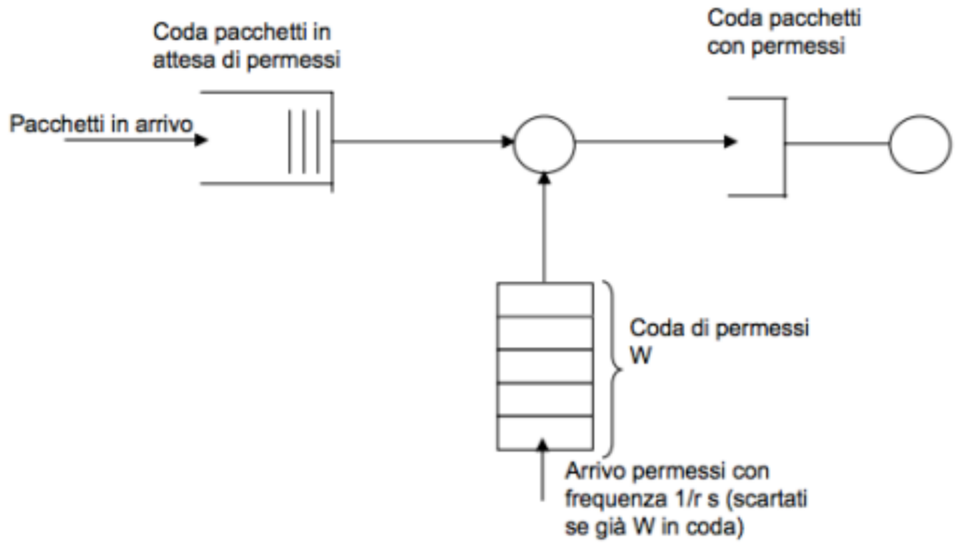
Esercizio 1

Si vogliono analizzare le prestazioni della tecnica di controllo di flusso Token Bucket nelle seguenti ipotesi:
- il traffico offerto è di Poisson con valor medio pari a λ pacchetti/secondo
- la generazione dei permessi avviene secondo un processo di Poisson con valor medio μ permessi/secondo
- la capacità della coda dei permessi è pari ad 1 permesso
- la capacità della coda dei pacchetti è pari a 2 pacchetti
- un permesso abilita alla trasmissione di uno e un solo pacchetto
- la trasmissione di un pacchetto è istantanea ed avviene quando nel trasmettitore c'è almeno un pacchetto ed un permesso

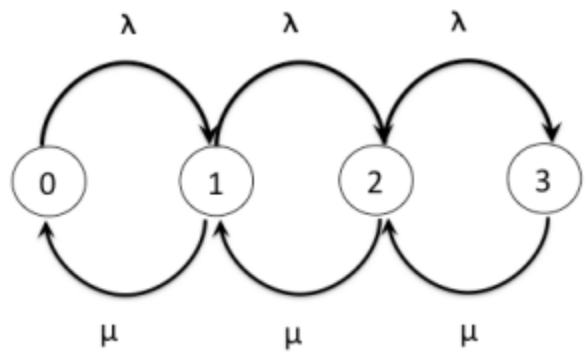
1) Si indichi con chiarezza il modello markoviano del sistema
2) Si indichino per quali valori di λ, fissato $\mu = 0.5$, il sistema è stabile, ovvero raggiunge uno stato stazionario.

Calcolare, nel caso $\lambda=2\mu$:
3) le probabilità di stato stazionarie
4) il traffico medio lasciato passare dal controllore di flusso
5) il tempo medio di attesa di un pacchetto nel sistema.

Soluzione :



1) La catena di Markov è la seguente:



Stato 0: 1 permesso (in attesa di pacchetto)
Stato 1: 0 permessi
Stato 2: 1 pacchetto (in attesa di permesso)
Stato 3: 2 pacchetti (in attesa di permesso)

2) Il sistema è stabile per ogni valore di λ, μ in quanto è caratterizzato da una coda finita.

Calcolare, nel caso $\lambda=2\mu$:

3) le probabilità di stato stazionarie
$\lambda=1$, $\mu=0.5$
Le probabilità di stato stazionarie della catena di Markov qui sopra si ottengono semplicemente imponendo l'equilibrio dei flussi al nodo 0, e quindi all'insieme

dei nodi (0 e 1) e quindi nodo 3 (è più semplice da scrivere), ed infine imponendo che le probabilità stazionarie sommino ad 1. Quindi:

Equilibrio nodo 0: $\lambda p0= \mu\ p1$
Equilibrio nodi (0 e 1): $\lambda p1= \mu\ p2$
Equilibrio nodo 3: $\lambda p2= \mu\ p3$
Condizione di normalizzazione: $p0+p1+p2+p3 = 1$

Definiamo per comodità: $\rho = \lambda/ \mu$

Risulta quindi dalla 1a equazione: $p1 = \rho\ p0$
Dalla 2a equazione: $p2 = \rho\ p1 = \rho^2\ p0$
Dalla 3a equazione: $p3 = \rho\ p2 = \rho^3\ p0$
Infine sostituendo nella 3a equazione: $p0+\rho\ p0+ \rho^2\ p0 + \rho^3\ p0 = 1$,

ovvero: $p0\ (1+\rho + \rho^2 + \rho^3)= 1$.

Quindi le probabilità di stato stazionarie risultano (in forma letterale) pari a :
$p0 = 1/ (1+\rho + \rho^2 + \rho^3)$
$p1 = \rho / (1+\rho + \rho^2 + \rho^3)$
$p2 = \rho^2/ (1+\rho + \rho^2 + \rho^3)$
$p3 = \rho^3/ (1+\rho + \rho^2 + \rho^3)$

Nel nostro caso, $\rho = \lambda/ \mu = 2$. Quindi:
$p0 = 1/ (1 + 2 + 4 + 8) = 1/15$
$p1 = 2/ (1 + 2 + 4 + 8) = 2/15$
$p2 = 4/ (1 + 2 + 4 + 8) = 4/15$
$p3 = 8/ (1 + 2 + 4 + 8) = 8/15$

4) il traffico medio lasciato passare dal controllore di flusso

Il traffico medio lasciato passare dal controllore di flusso si calcola sommando le seguenti componenti, analizzando la catena di markov stato per stato:
- Nello stato 0 (1 permesso nel sistema, in attesa di pacchetto), con frequenza media λ arriva un pacchetto e grazie al permesso viene lasciato passare;
- Nello stato 2 (1 pacchetto, in attesa di permesso), con frequenza media μ arriva un permesso e fa passare il pacchetto in attesa;
- Nello stato 3 (2 pacchetti, in attesa di permesso), con frequenza media μ arriva un permesso e fa passare uno dei 2 pacchetti in attesa;

Questi sono tutti e soli gli stati (ed eventi, ovvero arrive di permesso/pacchetto) che portano a smaltire/lasciar passare traffico da parte del controllore Token Bucket.

Sommando: Traffico medio lasciato passare dal controllore di flusso = λ p0 + μ p2 + μ p3
Essendo $\lambda = 2\mu$ possiamo scrivere anche: 2μ p0 + μ p2 + μ p3 = $2\mu/15 + 4\mu/15 + 8\mu/15 = 14\mu/15$.
Oppure: $7\lambda/15$

5) Il tempo medio di attesa di un pacchetto nel sistema.
   Applico il Teorema di Little al sottosistema "Controllore Token Bucket".

   $N = \Lambda * T$

   Dove N: numero medio pacchetti nel sistema.
   Λ: traffico medio entrante nel sistema = $7\lambda/15$

T: Il tempo medio di attesa di un pacchetto nel sistema, che vogliamo appunto calcolare.
N lo calcolo dalla catena di Markov: gli unici 2 stati in cui ho pacchetti in coda, dunque in attesa nel sistema, sono:
Stato 2: 1 pacchetto (in attesa di permesso)
Stato 3: 2 pacchetti (in attesa di permesso)

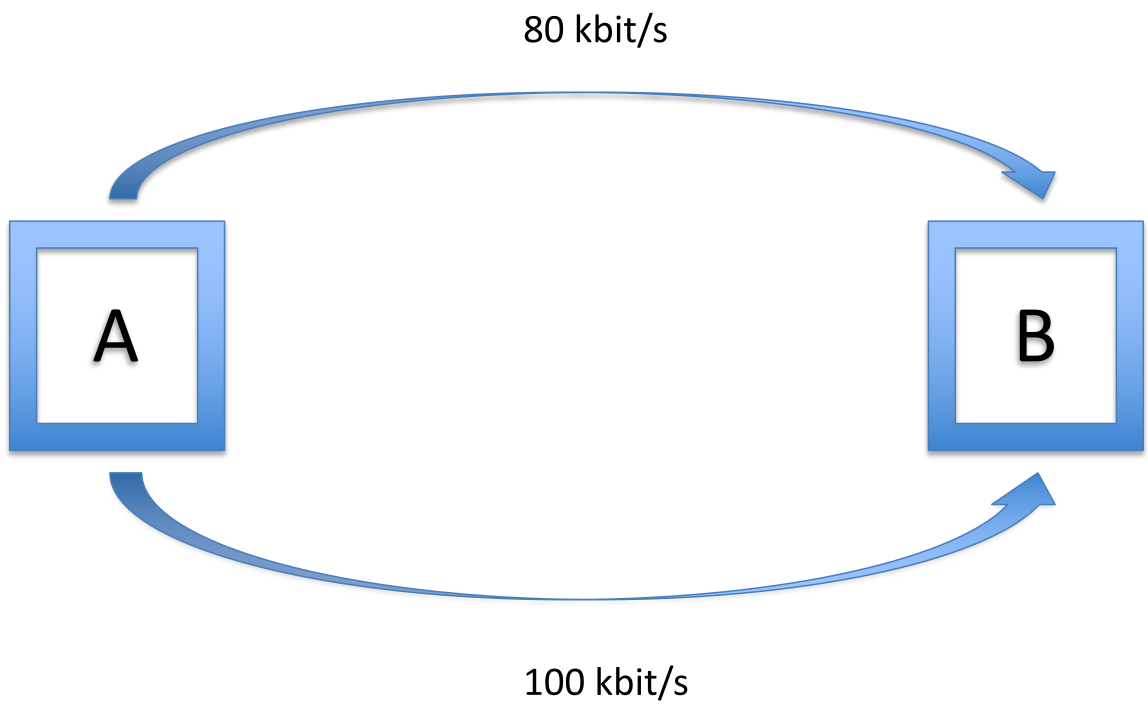
Quindi: $N = 1 * p2 + 2 * p3 = 4/15 + 2*8/15 = 20/15 = 4/3$.
$T = N/\Lambda = 4/3 / (7\lambda/15) = 60/21\lambda = 20/7\lambda$

Esercizio 2

Si consideri la rete rappresentata in figura, in cui i nodi A e B sono collegati da due link (L1 ed L2) le cui velocità di trasmissione sono espresse in kbit/s. Alla rete vengono offerti due flussi di traffico *f1* e *f2*, entrambi da A verso B, pari rispettivamente a 40 e 60 kbit/s. Si supponga che la lunghezza media dei pacchetti offerti alla rete sia 1000 bit.

1)Supponendo di dover utilizzare un instradamento non suddiviso, si indichi su quali link instradare i flussi offerti al fine di minimizzare il ritardo medio in rete (grado di servizio). Si calcoli quindi il ritardo medio in rete ottenuto a seguito dell'instradamento scelto

2)Si supponga ora di poter suddividere i flussi offerti sui due link esistenti fra A e B. Si calcoli l'allocazione di traffico ottimale sui link L1 ed L2 al fine di minimizzare il ritardo medio in rete (grado di servizio). Si calcoli quindi il ritardo medio in rete ottenuto a seguito dell'instradamento così calcolato.



Soluzione

Esprimiamo anzitutto tutte le grandezze in gioco come pacchetti/s. E' sufficiente dividere per la lunghezza media dei pacchetti, ovvero 1000 bit. Per cui:

Velocità di trasmissione link L1 = 80000 bit/s / (1000 bit/pacchetto) = 80 pacchetti /secondo = V1

Velocità di trasmissione link L2 = 100000 bit/s / (1000 bit/pacchetto) = 100 pacchetti /secondo = V2

Traffico offerto da A verso B = 40000 bit/s / (1000 bit/pacchetto) = 40 pacchetti /secondo =Lambda1

Traffico offerto da A verso B = 60000 bit/s / (1000 bit/pacchetto) = 60 pacchetti /secondo =Lambda2

Ovviamente, in caso di instradamento NON suddiviso, conviene instradare tutto il traffico Lambda1 sul link L1 e tutto il traffico Lambda2 sul link L2. Il ritardo medio che otteniamo con questo instradamento (non suddiviso, in quanto ciascuno dei 2 flussi rimano "integro" ovvero non viene splittato sui due link), utilizzando l'espressione del ritardo T di una coda MM1, risulta:

$$T = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{Lambda1}{V1 - Lambda1} + \frac{Lambda2}{V2 - Lambda2}\right)$$

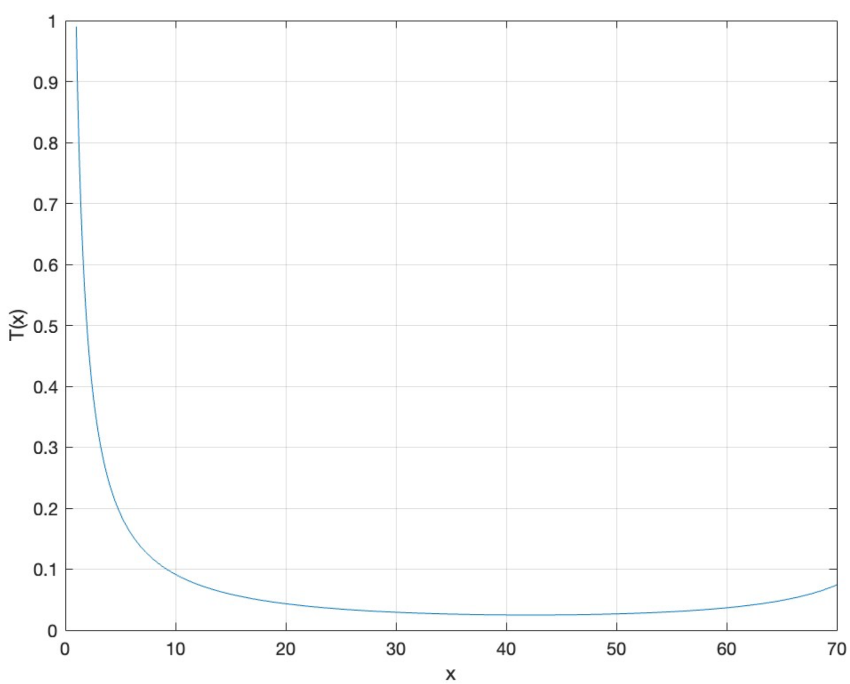
$$T = \frac{1}{100}\left(\frac{40}{80 - 40} + \frac{60}{100 - 60}\right) = 0.025s/pck = 25ms/pck$$

2) Indichiamo con X la quantità di traffico che trasmettiamo sul link L1 e 100-X (la somma deve dare appunto il traffico totale, ovvero 100 pacchetti/secondo) sul link L2. Ovviamente deve valere il vincolo 0 ≤X≤ 80 (il link L1 ha infatti capacità di 80 pacchetti/s).

Il ritardo medio totale, T, funzione di X, T(X), che noi vogliamo minimizzare ha quindi l'espressione seguente (Grado di Servizio di una rete, si veda slide 14

https://cs.unibg.it/martignon/documenti/reti/3-RetiDiCode.pdf :

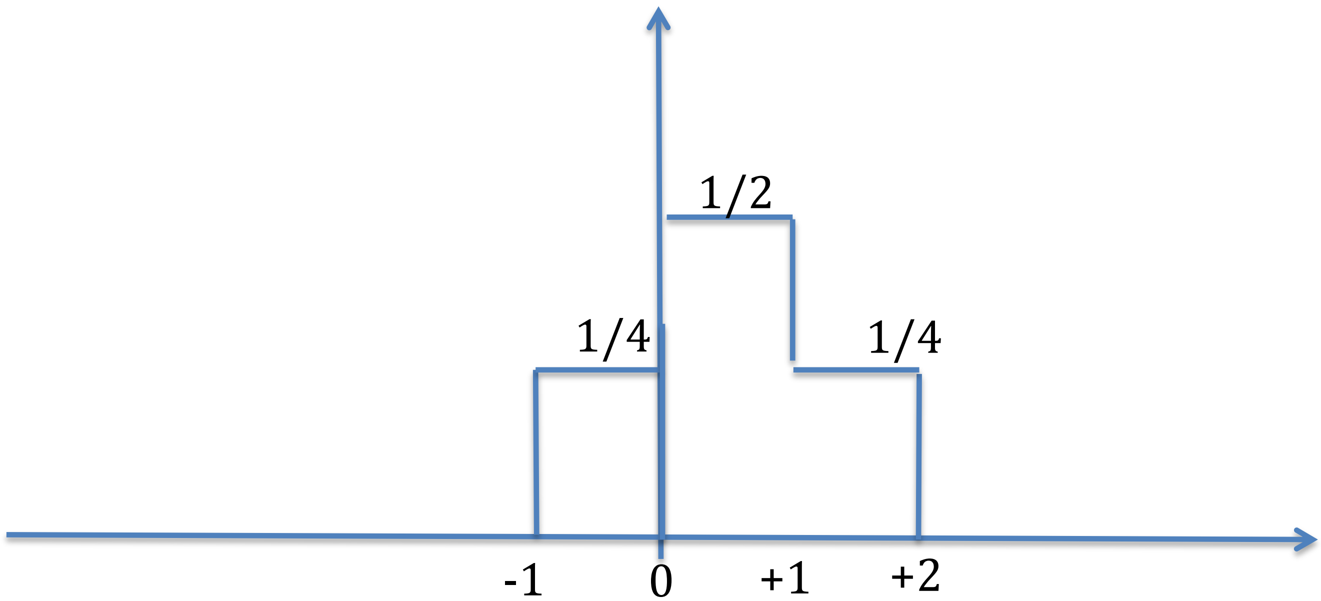
$$\mathrm{T(X)} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{V1} - \mathrm{X}} + \frac{100 - \mathrm{X}}{\mathrm{V2} - (100 - \mathrm{X})}\right) = \frac{1}{100}\left(\frac{\mathrm{X}}{80 - \mathrm{X}} + \frac{100 - \mathrm{X}}{X}\right).$$



Il minimo della funzione è 0.0249 s/pck (24.9 ms/pck) e si ottiene (derivando la funzione T(x) di cui sopra e imponendo che la derivata sia uguale a zero) per x= 42.23.

Esercizio 3

Si consideri una variabile aleatoria U avente distribuzione uniforme in [0,1]. Sia X una variabile aleatoria avente densità di probabilità f(x) indicata nella seguente figura:



1a) Si calcoli quanto vale la probabilità che X sia compreso tra – 1/2 e + 1/2.

1b) Si indichi un procedimento per sintetizzare la variabile aleatoria X

2)Si indichi un procedimento per:

. a) sintetizzare una variabile aleatoria uniforme negli intervalli [-5,-4] e [-3, +4]

. b) sintetizzare una variabile Y avente densità di probabilità $f_Y(x) = 1/x^2 \quad 1/2 \leq x \leq 1$

Soluzione :

1a) P(-1/2<=X <= ½) =1/4*1/2 + ½*1/2=1/8+1/4=3/8.

1b) **Se U <= ¼,** sintetizzo la parte a sinistra della distribuzione:

Moltiplico per 4: 4U (condizionata a U <= ¼) è "piatta"/uniforme tra 0 e 1.

Quindi **4U-1** è "piatta"/uniforme tra -1 e 0 come desiderato.

Se ¼ < U <= ¾, sintetizzo la parte centrale.

Moltiplico per 2: 2U (condizionata a ¼ < U <= ¾) è "piatta"/uniforme tra 1/2 e 3/2.

Quindi **2U-1/2** è "piatta"/uniforme tra 0 e 1 come desiderato.

Infine, **se U > ¾,** sintetizzo la parte a destra.

Moltiplico per 4: 4U (condizionata a U > ¾) è "piatta"/uniforme tra 3 e 4.

Quindi **4U-2** è "piatta"/uniforme tra 1 e 2 come desiderato.

- Riassumendo, per sintetizzare la nostra v.a., semplicemente porro':
  se 0<= U<= 1/4 -> X=4U-1
  se 1/4< U<= 3/4 -> X=2U-1/2
  se ¾<U<=1 -> X= 4U-2

1) **a)** Il supporto della variabile aleatoria che vogliamo sintetizzare è compreso fra -5 e -4 (ampiezza = 1) e tra -3 e +4 (ampiezza uguale a 7).

   Procedo a sintetizzare questa variabile aleatoria "spezzando" il procedimento in due parti: sintetizzo prima la "parte" della distribuzione compresa fra -5 e -4. L'area di questa parte è pari a 1/8

   Procedo in questo modo: data U la nostra v.a. Uniforme fra 0 e 1:
   - se 0<= U<= 1/8 allora moltiplicando per 8 ho -> 8U sarà uniforme (distribuzione "piatta") compreso fra 0 e +1. Quindi 8U-5 sarà sempre uniforme ("piatta") tra -5 e -4, come desiderato.

   - se 1/8< U<= 1 allora moltiplicando per 8 ho -> 8U sarà uniforme (distribuzione "piatta") compreso fra +1 e +8. Quindi 8U - 4 sarà sempre uniforme ("piatta") tra -3 e +4, come desiderato.
   - Riassumendo, per sintetizzare la nostra v.a., semplicemente porro':
     se 0 <= U <= 1/8 ---> X = 8U-5
     se 1/8 < U <= 1 ---> X = 8U-4

2b) Utilizziamo il metodo del percentile: calcoliamo la funzione di ripartizione F(U), che è pari all'integrale

$$F_X(x) = \int_{1/2}^{x} \frac{1}{y^2}\,dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_{1/2}^{x} = -\frac{1}{x} + 2$$

Ora inverto la F_X e la applico alla v.a. U, ovvero:

$$U = -\frac{1}{X} + 2 \text{ da cui } \boldsymbol{X} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}-\boldsymbol{U}}$$

Domande

1) Si enunci con precisione il Teorema di Burke, indicandone inoltre qual è l'utilità nello studio delle reti di code.

   Si veda slide 6,
   https://cs.unibg.it/martignon/documenti/reti/3-RetiDiCode.pdf

2) Si enunci e si dimostri con chiarezza e precisione il Teorema di Little (Little's Result).

   Si veda slide 39,
   https://cs.unibg.it/martignon/documenti/reti/2SistemiACoda.pdf

Domanda SOLO PER 9 CFU

Si consideri un sistema in cui una sorgente di traffico genera pacchetti di lunghezza variabile casuale S. La variabile S è caratterizzata da una densità di probabilità X_A (generica e data) se la sorgente si trova nello stato A, e da un'altra distribuzione X_B (sempre generica e data) quando la sorgente si trova nello stato B.

Il tempo d'interarrivo dei pacchetti è di tipo esponenziale negativo con valor medio = 200 ms. Il passaggio dallo stato A allo stato B e viceversa avviene sulla base di una catena di Markov bistato continua con tasso di uscita dallo stato A γ_A=2 [s^{-1}] e tasso di uscita dallo stato B, γ_B=1 [s^{-1}].

Si indichi un possibile procedimento in forma descrittiva per la simulazione ad eventi discreti della sorgente di traffico (si descrivano brevemente i tipi di eventi utilizzati e il "corpo" degli eventi, supponendo di disporre di un calendario eventi, delle procedure per generare pacchetti nello stato A e B e di una procedura per la sintesi di variabili esponenziali negative).

Soluzione:

Si può utilizzare la simulazione ad eventi discreti. Riassumiamo i dati del problema:

- Stati della sorgente: **A** e **B**.

- Lunghezza pacchetto (S):
  – se **A** → distribuita secondo X_A (generica e data, chiamiamola per praticità `sample_XA()`)
  – se **B** → distribuita secondo X_B (generica e data, chiamiamola per praticità `sample_XB()`)
- **Interarrivo** tra pacchetti (indichiamolo con "*I*"): esponenziale negativa con **valor medio 200 ms**: generabile come $I = -0.2 \ln(U)$ (I espresso in secondi, quindi con media 0.2s).
- **Il passaggio tra i due stati può essere modellizzato con una Catena di Markov a 2 stati**:
  – tasso d'uscita da **A**: γ_A=2 [s^{-1}] ⇒ durata media permanenza in **A: 500 ms**

  – tasso d'uscita da **B**: γ_B=1 [s^{-1}].⇒ durata media permanenza in **B: 1 s**

Inizializzazione:

- Si fissa una Stato iniziale (ad es. Stato = A)

- Si inserisce nel calendario l'evento "passaggio di stato A->B" dopo un tempo Exp. Neg. valor medio 500 ms.

- Si inserisce nel calendario l'evento "generazione pacchetto" dopo un tempo Exp. Neg. Valor medio I = 200 ms.

Eventi:

- **Passaggio di stato A->B:**

- si setta Stato=B.

- si inserisce nel calendario un evento "passaggio di stato B->A" dopo un tempo Exp. Neg. valor medio 500 ms (Durata_A = -0.5 ln(U), espresso in secondi).

- **Passaggio di stato B->A:**

- si setta Stato=A

- si inserisce nel calendario un evento "passaggio di stato A->B" dopo un tempo Exp. Neg. valor medio 1 s (Durata_B = - ln(U), espresso in secondi).

- **Generazione pacchetto:**

- si genera pacchetto utilizzando le distribuzioni (note e date dal testo del problema, `sample_XA()` oppure `sample_XB()`) a seconda che Stato valga A oppure B.

- si inserisce nel calendario un evento "generazione pacchetto" dopo un tempo *I* Esponenziale Negativo con Valor medio pari 200 ms.