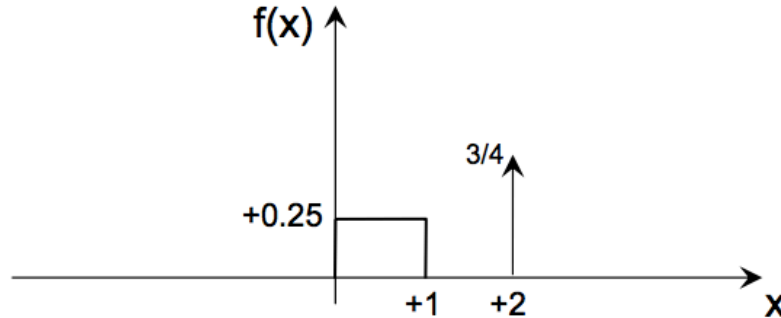


### Esercizio 3

Si consideri una variabile aleatoria  $U$  avente distribuzione uniforme in  $[0,1]$ .

Sia  $X$  una variabile aleatoria avente densità di probabilità  $f(x)$  indicata nella seguente figura:



1a) Si calcoli quanto vale la probabilità che  $X$  sia maggiore di 0.5, ovvero  $P(X \geq 0.5)$

1b) Si indichi un procedimento per sintetizzare la variabile aleatoria  $X$

2) Si indichi un procedimento per:

a) sintetizzare una variabile aleatoria uniforme negli intervalli  $[-3,-2]$  e  $[0,+5]$

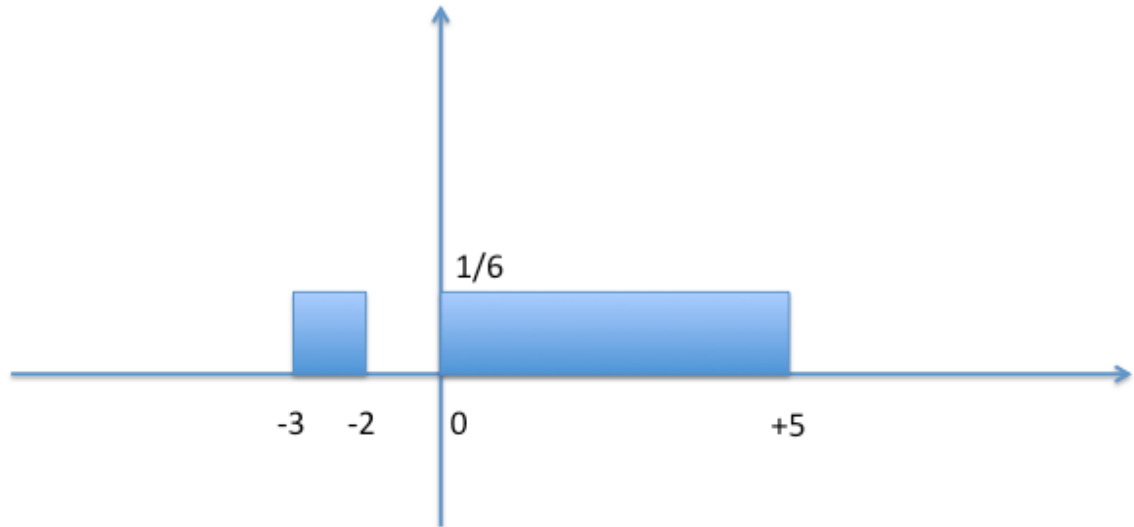
b) sintetizzare una variabile  $Y$  avente densità di probabilità  $f_Y(x) = \frac{2}{x}$   $+1 \leq x \leq \sqrt{e}$

1) a)  $P(X \geq 0.5) = (1 - 1/2) * 1/4 + 3/4 = 1/8 + 6/8 = 7/8$

b)

- Se  $U$  è compreso fra  $0 \leq U \leq 1/4$ , moltiplicando per 4 ho  $\rightarrow 4U$  sarà uniforme (“distribuzione “piatta”) compresa fra 0 e +1, come desiderato.
- Se  $U$  è compreso fra  $1/4 < U \leq 1$ , pongo  $X = +2$
- Riassumendo, per sintetizzare la nostra v.a., semplicemente porro':  
**se  $0 \leq U \leq 1/4 \rightarrow X = 4U$**   
**se  $1/4 < U \leq 1 \rightarrow X = +2$**

2) a) Il supporto della variabile aleatoria che vogliamo sintetizzare è compreso fra -3 e -2 (ampiezza = 1) e tra 0 e +5 (ampiezza uguale a 5). Ecco la distribuzione di probabilità:



Procedo a sintetizzare questa variabile aleatoria “spezzando” il procedimento in due parti: sintetizzo prima la “parte” della distribuzione compresa fra -3 e -2. L’area di questa parte è pari a  $1/6$

Procedo in questo modo: data  $U$  la nostra v.a. Uniforme fra 0 e 1:

- se  $0 \leq U \leq 1/6$  allora moltiplicando per 6 ho  $\rightarrow 6U$  sarà uniforme (“distribuzione “piatta”) compreso fra 0 e +1. Quindi  $6U-3$  sarà sempre uniforme (“piatta”) tra -3 o -2, come desiderato.
- se  $1/6 < U \leq 1$  allora moltiplicando per 6 ho  $\rightarrow 6U$  sarà uniforme (“distribuzione “piatta”) compreso fra +1 e +6. Quindi  $6U-1$  sarà sempre uniforme (“piatta”) tra 0 o +5, come desiderato.
- Riassumendo, per sintetizzare la nostra v.a., semplicemente porro’:  
**se  $0 \leq U \leq 1/6 \rightarrow X=6U-3$**   
**se  $1/6 < U \leq 1 \rightarrow X=6U-1$**

**2b)** Utilizziamo il metodo del percentile: calcoliamo la funzione di ripartizione  $F(U)$ , che è pari all’integrale

$$F_X(x) = \int_{+1}^x \frac{2}{y} dy = [2 \log(y)]_{+1}^x = 2 \log(x)$$

Ora inverte la  $F_X$  e la applico alla v.a.  $U$ , ovvero:

$$U = 2 \log(X) \text{ da cui } X = e^{\frac{U}{2}}$$