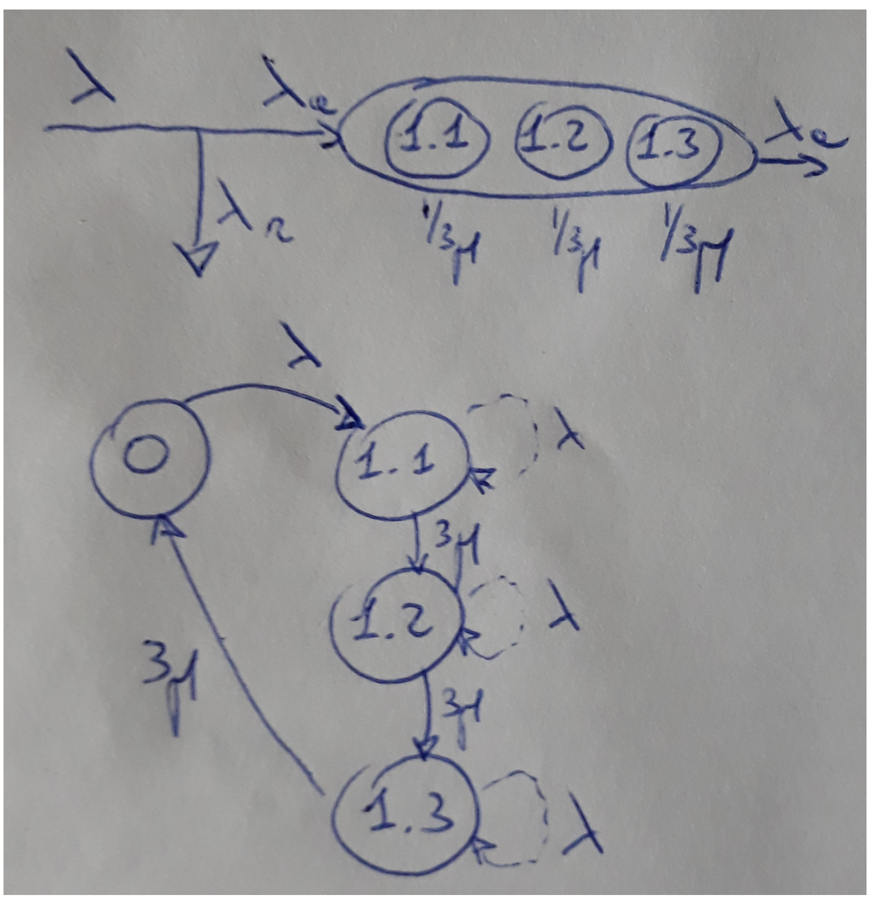
Esercizio 1 – 12 Giugno 2007

Si consideri un sistema a code caratterizzato da un servente e nessun posto in coda. Si supponga che il processo degli arrivi sia Poissoniano con valor medio λ pacchetti/secondo e che il tempo di trasmissione sia una variabile casuale *Erlangiana* di ordine 3 con media pari ad $1/\mu$ secondi.

1)Si indichi per quali valori di λ (fissato μ) il sistema è stabile, ovvero raggiunge uno stato stazionario.
Il sistema è stabile, ovvero raggiunge uno stato stazionario per ogni valore di λ e di μ in quanto è caratterizzato da una coda finita (in particolare, da una coda nulla).

2)Si descriva, tramite una catena di Markov, il sistema in esame, specificando con precisione gli stati introdotti e le transizioni tra tali stati.

Il sistema è il seguente. Per modellizzare una Erlangiana di ordine 3, il servizio viene visto come somma di tre stadi (gli stati 1.1, 1.2 e 1.3) la cui durata media è esponenziale negativa con media pari a $1/3\mu$. Gli stati sono quindi 4: 0, 1.1, 1.2 e 1.3. Ecco la catena di Markov corrispondente :



Si consideri quindi il caso $\lambda = \mu/2$. In questa ipotesi:
3)Si calcoli la distribuzione stazionaria del numero di pacchetti nel sistema.

Devo calcolare le probabilità di stato stazionarie della catena di Markov qui sopra, che si ottengono semplicemente imponendo l'equilibrio dei flussi al nodo « 0 », al nodo « 1.1 », al nodo « 1.2 » ed infine imponendo che le probabilità stazionarie sommino ad 1. Quindi:

Equilibrio nodo 0: $\lambda p_0 = 3\mu\, p_{13}$
Equilibrio nodo 1.1: $\lambda p_0 = 3\mu\, p_{11}$
Equilibrio nodo 1.2: $3\mu\, p_{11} = 3\mu\, p_{12}$

Condizione di normalizzazione: $p_0 + p_{11} + p_{12} + p_{13} = 1$

Risulta quindi dalla 1a equazione: $p_{13} = 1/6\, p_0$
Dalla 2a equazione: $p_{11} = 1/6\, p_0$
Dalla 3a equazione: $p_{11} = p_{12}$, per cui $p_{12} = 1/6\, p_0$

Infine sostituendo nella 3a equazione (di normalizzazione):
$p_0 + 1/6 p_0 + 1/6\, p_0 + 1/6\, p_0 = 1$, ovvero:
$p_0 = 2/3 = 6/9$.

Quindi le probabilità di stato stazionarie risultano pari a :
$p_0 = 6/9$
$p_{11} = 1/9$
$p_{12} = 1/9$
$p_{13} = 1/9$

4)Si determini il numero medio di pacchetti nel sistema
Dalla definizione :
$N = 0^* p_0 + 1^* p_{11} + 1^* p_{12} + 1^* p_{13} = p_{11} + p_{12} + p_{13} = 1/3$

5)Si determini il tempo medio totale di permanenza dei pacchetti che entrano nel sistema

Anche senza fare nessun conto, avendo il sistema coda nulla, il tempo medio totale di permanenza dei pacchetti che entrano nel sistema, T, è pari al tempo medio di servizio, che il testo dell'esercizio ci dice essere pari a $1/\mu$ secondi.

In alternativa, e a soli fini di verifica, posso applicare il teorema di Little al nostro sistema. Il teorema dice che il numero medio N di pacchetti nel sistema (che raggiunge sempre uno stato stazionario, peraltro), è pari al traffico medio *entrante* nel sistema, che indichiamo con **λa** (<u>diverso da</u> λ) per T, tempo medio speso nel sistema, che vogliamo appunto calcolare.

Quanto vale **λa** ? In realtà è calcolabile sapendo che il traffico totale (medio) offerto al sistema, λ, è pari alla somma del traffico totale (medio) entrante, **λa**, più quello (medio) scartato dal sistema, **λr,** che è la risposta al punto 7).

Quindi **λa =** λ - **λa** = $2\lambda/3$ (si veda la risposta al punto 7) qui sotto) =

N lo abbiamo calcolato al punto precedente :
N=1/3

Quindi : N = **λa * T**
Ovvero: $T= N/\lambda a = (1/3)/(2\lambda/3) = 1/(2\lambda) = 1/\mu$

6)Si determini il tempo medio di attesa in coda dei pacchetti che entrano nel sistema
Ovviamente è nullo, visto che il sistema non ha nessun posto in coda. W=0.

7)Si determini il rate medio dei pacchetti scartati dal Sistema
Guardando la catena di Markov, viene perso del traffico negli stati 1.1, 1.2 e 1.3, laddove viene sempre offerto traffico con valor medio **λ** e questo non trova posto nel sistema.

$\lambda r = \lambda p_{11} + \lambda p_{12} + \lambda p_{13} = \lambda/3$