Esercizio 1 : Token Bucket

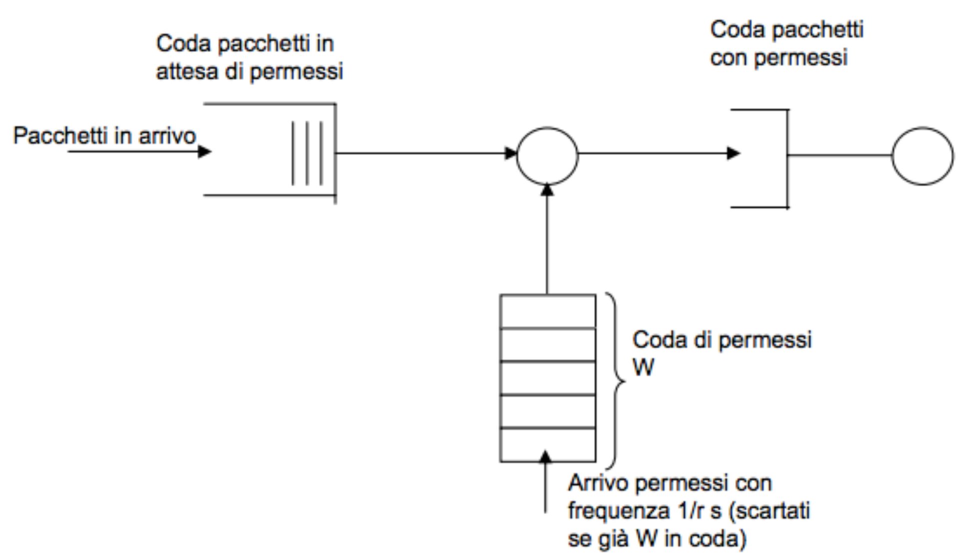
Si vogliono analizzare le prestazioni della tecnica di controllo di flusso Token Bucket nelle seguenti ipotesi:
- il traffico offerto è di Poisson con valor medio pari a λ pacchetti/secondo
- la generazione dei permessi avviene secondo un processo di Poisson con valor medio μ permessi/secondo
- la capacità della coda dei permessi è pari ad 1 permesso
- la capacità della coda dei pacchetti è pari a 2 pacchetti
- un permesso abilita alla trasmissione di uno ed un solo pacchetto
- la trasmissione di un pacchetto è istantanea ed avviene quando nel trasmettitore c'è almeno un pacchetto ed un permesso

1)Si indichi con chiarezza il modello markoviano del sistema
2)Si calcolino le probabilità di stato stazionarie

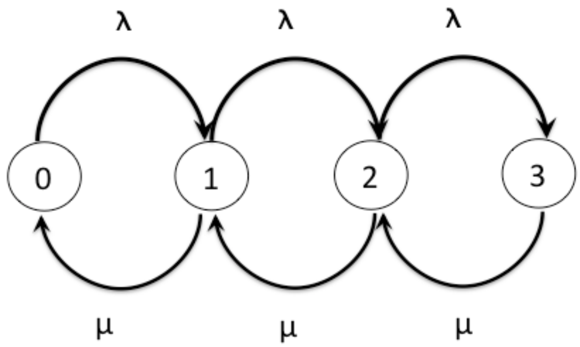
Calcolare, nel caso $\lambda=\mu$:

3)il traffico medio lasciato passare dal controllore di flusso
4)il tempo medio di attesa di un pacchetto nel sistema.

Soluzione



1) Il modello markoviano del sistema è il seguente:



Stato 0: 1 permesso (in attesa di pacchetto)
Stato 1: 0 permessi
Stato 2: 1 pacchetto (in attesa di permesso)
Stato 3: 2 pacchetti (in attesa di permesso)

2)
Le probabilità di stato stazionarie della catena di Markov qui sopra si ottengono semplicemente imponendo l'equilibrio dei flussi al nodo 0, e quindi all'insieme dei nodi (0 e 1) e quindi nodo 3 (è più semplice da scrivere), ed infine imponendo che le probabilità stazionarie sommino ad 1. Quindi:

Equilibrio nodo 0: $\lambda p_0 = \mu\, p_1$
Equilibrio nodi (0 e 1): $\lambda p_1 = \mu\, p_2$
Equilibrio nodo 3: $\lambda p_2 = \mu\, p_3$
Condizione di normalizzazione: $p_0+p_1+p_2+p_3 = 1$

Definiamo per comodità:
$\rho = \lambda / \mu$

Risulta quindi dalla 1a equazione: $p_1 = \rho\, p_0$
Dalla 2a equazione: $p_2 = \rho\, p_1 = \rho^2\, p_0$
Dalla 3a equazione: $p_3 = \rho\, p_2 = \rho^3\, p_0$

Infine sostituendo nella 3a equazione: $p_0+\rho\, p_0+ \rho^2\, p_0 + \rho^3\, p_0 = 1$, ovvero: $p_0\,(1+\rho + \rho^2 + \rho^3)= 1$.

Quindi le probabilità di stato stazionarie risultano (in forma letterale) pari a :
$p_0 = 1/ (1+\rho + \rho^2 + \rho^3)$
$p_1 = \rho / (1+\rho + \rho^2 + \rho^3)$
$p_2 = \rho^2/ (1+\rho + \rho^2 + \rho^3)$
$p_3 = \rho^3/ (1+\rho + \rho^2 + \rho^3)$

3) $\rho = \lambda / \mu = 1$

Quindi:
$p_0 = 1/4$
$p_1 = 1/4$
$p_2 = 1/4$
$p_3 = 1/4$

Il traffico medio lasciato passare dal controllore di flusso si calcola sommando le seguenti componenti, analizzando la catena di markov stato per stato:

- Nello stato 0 (1 permesso nel sistema, in attesa di pacchetto), con frequenza media λ arriva un pacchetto e grazie al permesso viene lasciato passare;

- Nello stato 2 (1 pacchetto, in attesa di permesso), con frequenza media μ arriva un permesso e fa passare il pacchetto in attesa;

- Nello stato 3 (2 pacchetti, in attesa di permesso), con frequenza media μ arriva un permesso e fa passare uno dei 2 pacchetti in attesa;

Questi sono tutti e soli gli stati (ed eventi, ovvero arrive di permesso/pacchetto) che portano a smaltire/lasciar passare traffic da parte del controllore Token Bucket.

Sommando:
Traffico medio lasciato passare dal controllore di flusso = $\lambda p_0 + \mu p_2 + \mu p_3$
Essendo $\lambda = \mu$ possiamo scrivere anche: Traffico medio lasciato passare dal controllore di flusso = $3\lambda/4 = 3\mu/4$

Calcolo alternativo:

In stato stazionario, nel sistema "entrano" permessi con frequenza μ tranne che per lo stato 0 (in cui la coda dei permessi è già piena). Quindi il traffico/rate medio di permessi entrante nel sistema è pari a $\mu(1- p_0) = 3\mu/4$

Il rate medio dei permessi entrant uguaglia il rate medio dei pacchetti lasciati passare dal controllore Token Bucket.

4) Il tempo medio di attesa di un pacchetto nel sistema.
Applico il Teorema di Little al sottosistema "Controllore Token Bucket".

$N = \Lambda * T$

Dove N: numero medio pacchetti nel sistema.
Λ: traffico medio entrante nel sistema = $3\lambda/4$

T: Il tempo medio di attesa di un pacchetto nel sistema, che vogliamo appunto calcolare.
N lo calcolo dalla catena di Markov: gli unici 2 stati in cui ho pacchetti in coda, dunque in attesa nel sistema, sono:

Stato 2: 1 pacchetto (in attesa di permesso)
Stato 3: 2 pacchetti (in attesa di permesso)

Quindi: $N = 1 * p_2 + 2 * p_3 = 1/4 + 2/4 = 3/4$

$T = N/\Lambda = \frac{3}{4} / (3\lambda/4) = 1/\lambda$