Esercizio 2 (Primo Appello - 14 Giugno 2005)

Si supponga di disporre di un generatore di numeri pseudo-casuali uniformi tra [0,1]. Si indichi un procedimento per:
a) sintetizzare una variabile aleatoria uniforme in [-1, 0]
b) sintetizzare una variabile aleatoria uniforme in [-2, +3]
c) sintetizzare una variabile avente densità di probabilità $f_X(x) = e^{-x} \quad x \geq 0$
d) sintetizzare una variabile aleatoria X che assume il valore 1 con probabilità 0.2 ed il valore 2 con probabilità 0.8

Soluzione:

Il metodo che utlizzeremo per sintetizzare variabili aleatorie di distribuzione qualunque è il cosiddetto "metodo del percentile", illustrato nella serie di slide (https://cs.unibg.it/martignon/documenti/reti/Simulazione.pdf) in particolare alla slide numero 51. In ogni caso, come anche indicato nel testo dell'esercizion, supporremo sempre di avere a disposizione un generatore di numeri pseudo-casuali uniformi tra [0,1]. Indicheremo con U una variabile aleatoria (v.a.) distribuita uniformemente appunto tra [0,1].

a) sintetizzare una variabile aleatoria uniforme in [-1, 0]

In questo caso la soluzione è molto semplice, perché se U è una v.a. uniforme tra [0,1], basta moltiplicarla per -1 e ottenere cosi' una v.a. uniforme in [-1, 0]. Quindi la nostra variabile aleatoria cercata, che indichiamo con Y, sarà:

$$\boldsymbol{Y = -U}$$

b) sintetizzare una variabile aleatoria uniforme in [-2, +3]

In questo caso, e in generale in tutti i casi in cui è necessario generare variabili aleatorie uniformi in un generico intervallo [a, b], con "a" e "b" generici, anche negativi (e ovviamente con b > a), basta considerare che:

1) se U è appunto una v.a. Uniforme tra [0,1], se la moltiplichiamo per (b-a) otteniamo una v.a. sempre Uniforme ma tra [0, b-a].
   Chiamiamo questa v.a. **X = (b-a)*U**
2) se quindi "trasliamo" tale v.a., sommando ad essa il valore "a", otteniamo proprio la v.a. desiderata: **Y = a+(b-a)*U** è proprio Uniforme in [a, b].
3) Step di verifica: consiglio di verificare i "valori limite" della v.a. sintetizzata. La v.a. Y = a+(b-a)*U, dato che U è uniforme tra [0,1], assume dunque valori compresi tra:
   a. per U= 0 → Y= a+(b-a)*0 = a
   b. per U=1 -→Y= a+(b-a)*1 = a+b-a = b

   Proprio come desideravamo, ed è dunque Uniforme in [a, b] (è una trasformazione lineare di una v.a. Uniforme, del resto)

Quindi per tornare al nostro caso, ovvero sintetizzare una variabile aleatoria uniforme in [-2, +3], il procedimento risulta:
$\boldsymbol{Y} = -2 + (3 - (-2)) * U = \mathbf{-2 + 5}\boldsymbol{U}$, che è appunto uniforme tra -2 e +3.

c) sintetizzare una variabile avente densità di probabilità $f_X(x) = e^{-x} \quad x \geq 0$

Si tratta in questo caso di una v.a. esponenziale negativa, come illustrato nella slide 54 (https://cs.unibg.it/martignon/documenti/reti/Simulazione.pdf), con parametro λ = 1.

Per applicare il metodo del percentile bisogna quindi calcolare la CDF (chiamata anche Funzione di Ripartizione) della nostra v.a., ovvero calcolare:

$$F_x(x) = \int_0^x f(y)dy = \int_0^x e^{-y}dy = [-e^{-y}]_0^x = 1 - e^{-x}$$

Basta quindi invertire tale funzione, ovvero calcolare F_x^{-1} e infine applicarla ad U (si riveda la slide 51 https://cs.unibg.it/martignon/documenti/reti/Simulazione.pdf).

Quindi, le nostro caso, gli step per sintetizzare la nostra v.a., che indichiamo con Y, richiesta sono:

$$U = 1 - e^{-Y} \rightarrow \ e^{-Y} = 1 - U \rightarrow \ -Y = \ln(1 - U) \rightarrow \ \boldsymbol{Y} = -\mathbf{ln}\,(\boldsymbol{U})$$

Ricordo che, ovviamente, le variabili U e 1-U hanno identica distribuzione (sono entrambe Uniformi tra [0,1]) per cui è molto meglio scrivere U anziché 1-U (inutile fare un’operazione di sottrazione in più, del tutto non necessaria).

d) sintetizzare una variabile aleatoria X che assume il valore 1 con probabilità 0.2 ed il valore 2 con probabilità 0.8.

Si vedano slide 60, 61 e soprattutto 62 (il caso è molto simile a quest’ultima) https://cs.unibg.it/martignon/documenti/reti/Simulazione.pdf

Molto semplicemente, uso la mia v.a. U uniforme tra [0,1] e impongo quanto segue per generare la mia v.a. Y desiderata:

$$\begin{cases} Se\ U \leq 0.2\ allora\ Y = 1 \\ Se\ U > 0.2\ allora\ Y = 2 \end{cases}$$

E’ inutile pero’ eseguire 2 confronti, è più compatto scrivere come segue:

$$\begin{cases} \boldsymbol{If\ U \leq 0.2\ then\ Y = 1} \\ \qquad \boldsymbol{Else\ Y = 2} \end{cases}$$