Tempo a disposizione per lo svolgimento: 1 ora e 30 minuti
Avvertenza: Si ricordi di indicare su **ogni singolo foglio consegnato** nome, cognome e numero di matricola

Esercizio 1

Si consideri un sistema a code caratterizzato da un servente e 2 posti in coda. Si supponga che il processo degli arrivi sia Poissoniano con valor medio λ pacchetti/secondo e che il tempo di trasmissione sia una variabile casuale esponenziale negativa con media pari ad $1/\mu$ secondi.

1) Si indichi per quali valori di λ e μ, il sistema è stabile, ovvero raggiunge uno stato stazionario.
2) Si descriva, tramite una catena di Markov, il sistema in esame.

Si consideri quindi il caso $\lambda = \mu$. In questa ipotesi:

3) Si calcolino, in forma numerica, le probabilità di stato stazionarie.
4) Si calcoli la probabilità di blocco del sistema.
5) Si calcoli il numero medio di pacchetti nel sistema.
6) Si calcoli il tempo medio speso nel sistema da un pacchetto.
7) Si calcoli il tempo medio speso in coda da un pacchetto.

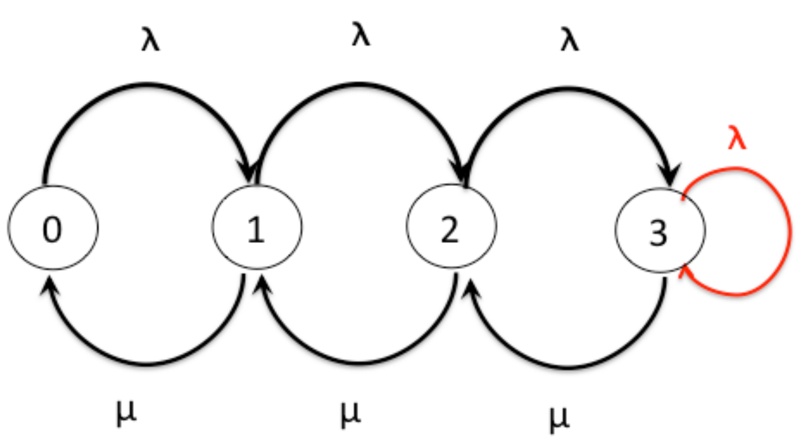
Soluzione :

1) Si indichi per quali valori di λ e μ, il sistema è stabile, ovvero raggiunge uno stato stazionario.

Il sistema è stabile per ogni valore di λ e di μ in quanto è caratterizzato da una coda finita (in particolare, da una coda di 2 posti).

2) Si descriva, tramite una catena di Markov, il sistema in esame.

Stato: numero pacchetti nel sistema (da 0 a 3).
Catena di Markov:



Si consideri quindi il caso $\lambda = \mu$. In questa ipotesi:

3) Si calcolino, in forma numerica, le probabilità di stato stazionarie.

Le probabilità di stato stazionarie della catena di Markov qui sopra si ottengono semplicemente imponendo l'equilibrio dei flussi al nodo 0, quindi all'insieme dei nodi (0-1), al nodo 3 (è più semplice da scrivere), ed infine imponendo che le probabilità stazionarie sommino ad 1. Quindi:

Equilibrio nodo 0: $\lambda p_0 = \mu\, p_1$
Equilibrio nodo (0-1): $\lambda p_1 = \mu\, p_2$
Equilibrio nodo 3: $\lambda p_2 = \mu\, p_3$

Condizione di normalizzazione: $p_0+p_1+p_2+p_3 = 1$

Definiamo per comodità:
$\rho = \lambda / \mu = 1$ (nel nostro caso).

Risulta quindi dalla 1a equazione: $p_1 = \rho\, p_0$
Dalla 2a equazione: $p_2 = (\rho)\, p_1 = (\rho^2) p_0$
Dalla 3a equazione: $p_3 = (\rho)\, p_2 = (\rho^3) p_0$

Infine sostituendo nella 3a equazione: $p_0+\rho\, p_0+ (\rho^2)\, p_0 +(\rho^3)p_0 =1$, ovvero:
$p_0\, (1+\rho + \rho^2+\rho^3)= 1$.

Quindi le probabilità di stato stazionarie risultano (essendo $\rho = 1$) pari a :
$p_0 = 1/ (1+1+1+1) =$ **1/4**
$p_1 =$ **1/4**
$p_2 =$ **1/4**
$p_3 =$ **1/4**

4)Si calcoli la probabilità di blocco del sistema.
La probabilità di blocco del sistema è pari alla probabilità di trovarsi nello stato (3), ovvero P(blocco)= $p_3 =$ **1/4**

5) Si calcoli il numero medio di pacchetti nel sistema.
Dalla defінzione di numero medio di pacchetti nel sistema, che chiamero' N:
$N=0^* p_0 +1^* p_1+2^* p_2+3^* p_3= p_1+2^* p_2 +3^* p_3=1/4+2^*1/4+3^*1/4 = (1+2+3)/4=$**3/2**

6) Si calcoli il tempo medio speso nel sistema da un pacchetto.

Applichiamo il teorema di Little al nostro sistema. Il teorema dice che il numero medio N di pacchetti nel sistema (che raggiunge sempre uno stato stazionario, peraltro), e che abbiamo già calcolato al punto 5), è pari al traffico medio *entrante* nel sistema, che indichiamo con **λa** (diverso da λ) per T, tempo medio speso nel sistema, che vogliamo appunto calcolare.
Quanto vale **λa** ? In realtà è calcolabile sapendo che il traffico totale (medio) offerto al sistema, λ , è pari alla somma del traffico totale (medio) entrante, **λa**, più quello (medio) scartato dal sistema, **λr**).

λr vale $\lambda * p_3 = \lambda /4$

Quindi **λa =** λ - λr = (si veda la risposta al punto 8) qui sotto) = $\lambda - \lambda /4 = 3 \lambda /4$

Quindi : N = **λa * T**
Ovvero: T= N/ λa = (3/2) /(3 λ /4)=**2/ λ** (che è anche uguale a **2/ μ**)

7) Si calcoli il tempo medio speso in coda da un pacchetto.

Possiamo calcolare W in due modi. Il primo è il più semplice:
W= T – 1/ μ = 2/ μ - 1/ μ = **1/μ**

In alternativa: applichiamo il teorema di Little al sottosistema "coda", ovvero:
Nq = **λa * W**

λa l'abbiamo già calcolata in precedenza come λ - λr = $3 \lambda /4$

Nq, il numero medio di pacchetti in CODA, lo calcoliamo dalla definizione :

Nq = $1 * p_2 + 2 * p_3$ = ¼+2/4 =3/4 (nello stato 2 ho 1 pacchetto in coda, nello stato 3 ho 2 pacchetti in coda)
Quindi:
W= Nq/λa =(3/4)/(3 λ /4) = 1/ λ = **1/ μ**

Esercizio 2

Si consideri una connessione ottica che viene trasmessa su un cammino (path) lungo 750 km. Questo cammino è soggetto a guasti (failures) che vengono stimati essere in media pari a 4 failures/anno/1000 km (ovvero, 4 failures per anno ogni 1000 km di fibra). Il tempo medio di riparazione di un guasto (Mean Time To Repair, MTTR) risulta pari in media a 18 ore.

La connessione richiede un'availability non inferiore al 99.99%.

1)Si determini l'availability media di tale connessione, e si indichi inoltre se il livello di affidabilità richiesto viene rispettata oppure no.

2)Nel caso in cui si sia risposto al punto precedente che tale connessione non rispetta il proprio livello di affidabilità richiesto, si supponga ora di voler rispettare tale livello utilizzando la seguente soluzione: proteggere la connessione in modo dedicato (1:1), con un cammino di backup di uguale lunghezza e *link-disjoint* rispetto al cammino della connessione principale.

- Si determini qual è l'availability media ottenuta per la connessione utilizzando tale soluzione.

- Si indichi inoltre se il livello di affidabilità per tale connessione viene ora rispettato oppure no

Soluzione :

In questo caso ho un cammino soggetto a 4 guasti (failures) all'anno ogni 1000 km. La nostra connessione è lunga pero' 750km, quindi sarà soggetta a 3 failures/anno.

Un anno è composto da 365*24= 8760 ore.

Quindi avremo 3 failures ogni 8760 ore, ovvero in media il Mean Time To Failure (tempo medio tra un guasto ed il successivo) sarà pari a 8760/3 = 2920 ore.

Il MTTR è dato dal testo del problema: 18 ore

Riassumendo:
MTTF= 2920 ore
MTTR = 18 ore

Domanda 1) L'affidabilità (availability) media della connessione, A, ovvero la risposta alla domanda numero 1) è data da:

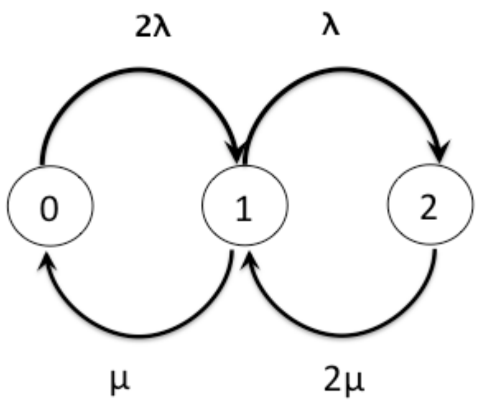
A = MTTF/(MTTF+MTTR)= 2920/(2920+18)=2920/2938= **0.99387, ovvero 99.387%**

Quindi: il livello di affidabilità richiesto (99.99%) **NON** viene rispettatato.

Domanda 2) Nel caso di protezione 1:1, ho un cammino di protezione dedicato, che protegge appunto il mio cammino (connessione) principale.

Utlizziamo il modello illustrato nella serie di lucidi sulla protezione delle reti di telecomunicazione
(https://cs.unibg.it/martignon/documenti/reti/Seminario_WDM_protection.pdf),

in particolare le slide 18 e 19 ("Analysis of 1:N protection without Service Differentiation"). Nel nostro caso la catena di Markov risulta essere la seguente, molto semplice:



Nella catena qui sopra, lo stato rappresenta il numero di connessioni (senza distinzione tra la connessione principale e quella di backup) che sono guaste, ed è ovviamente compreso tra 0 (nessun guasto) e 2 (entrambe guaste).

λ= 1/MTTF = 1/2920 (ore^-1)
μ=1/MTTR = 1/18 (ore^-1)

Definiamo per comodità:
$\rho = \lambda / \mu = 18/2920 = 0.006164383$

Le probabilità di stato stazionarie della catena di Markov qui sopra si ottengono semplicemente imponendo l'equilibrio dei flussi al nodo 0, e quindi al nodo 2 (è più semplice da scrivere), ed infine imponendo che le probabilità stazionarie sommino ad 1. Quindi:

Equilibrio nodo 0: $2\lambda p_0 = \mu\, p_1$
Equilibrio nodo 2: $\lambda p_1 = 2\mu\, p_2$
Condizione di normalizzazione: $p_0+p_1+p_2 = 1$

Risulta quindi dalla 1a equazione: $p_1 = 2(\lambda/\mu)p_0 = 2\rho\, p_0$
Dalla 2a equazione: $p_2 = (\lambda/ 2\mu)p_1 = (\rho/2)\, p_1 = \rho^2\, p_0$
Infine sostituendo nella 3a equazione: $p_0+2\rho\, p_0+ \rho^2\, p_0 = 1$, ovvero: $p_0\,(1+\rho)^2 = 1$

Quindi:
$p_0 = 1/(1+\rho)^2$
$p_1 = 2\rho / (1+\rho)^2$
$p_2 = \rho^2/(1+\rho)^2$

L'unavailability media (si veda equazione di slide 19), che indicheremo con $U_{1:1}$, si calcola come segue, tenendo conto che nel nostro caso N = 1 (protezione 1:1)

$$U(N,\lambda,\mu) = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{(n-1)}{N} p(n)$$

- Nello stato n, per n>=2, ci sono infatti (n-1) connessioni non protette sul totale delle N connessioni
- La probabilità che, nello stato n, una connessione scelta a caso fra le N sia proprio tra le (n-1) non protette è data dal rapporto (n-1)/N

Quindi nel nostro caso $U_{1:1} = p_2$. Del resto è ovvio: l'unico stato in cui la connessione principale NON risulta protetta è proprio quando entrambe le connessioni (principale e di backup) sono guaste, ovvero lo stato "2", che si verifica con probabilità p_2.
Di conseguenza l'affidabilità media del nostro sistema di protezione 1:1, che indichiamo come $A_{1:1}$, sarà data da $A_{1:1} = 1 - U_{1:1}$.

Numericamente $U_{1:1}=p_2$ = 3.75354327*10^-5
Quindi: $A_{1:1}=1- U_{1:1}$ = **0.99996246,** che è la risposta alla nostra domanda numero 2).
Ovvero 99.996246%
Chiaramente adesso il livello di affidabilità media è rispettato.

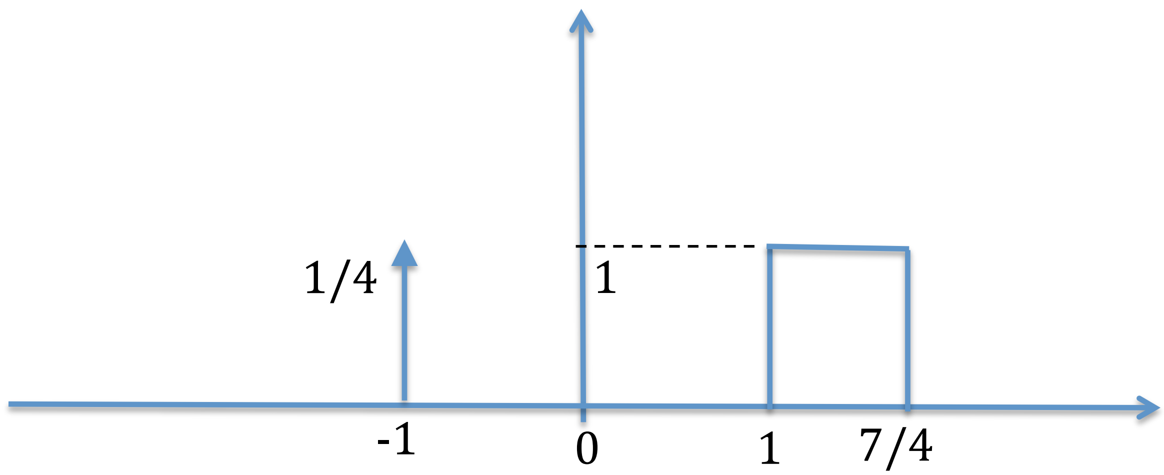
Nota: in questo caso molto semplice (due sole connessioni, una primaria e una di backup) si puo' anche ragionare semplicemente partendo dalla risposta al punto 1. Abbiamo infatti due connessioni (la principale e quella di backup), identiche, caratterizzate ciascuna da una affidabilità A = MTTF/(MTTF+MTTR)= 2920/(2920+18)=2920/2938=**0.99387**

Ma allora, l'unavailability (probabilità di guasto) per ciascuna di esse risulta pari a 1-A, e la probabilità che entrambe siano guaste contemporaneamente risulta (si tratta di eventi disgiunti): $(1-A)*(1-A) = (1-A)^2$

Quindi l'affidabilità del nostro sistema 1:1, $A_{1:1}$, è calcolabile come :
$A_{1:1} = 1 - (1-A)^2 = 1 - (1-A)^2 =$ **0.99996246**

Esercizio 3

Si consideri una variabile aleatoria U avente distribuzione uniforme in [0,1]. Sia X una variabile aleatoria avente densità di probabilità f(x) indicata nella seguente figura:



1a)Si calcoli quanto vale la probabilità che X sia maggiore di 1.5, ovvero $P(X \geq 3/2)$
1b)Si indichi un procedimento per sintetizzare la variabile aleatoria X

2)Si indichi un procedimento per:

. a) sintetizzare una variabile aleatoria uniforme negli intervalli [-4,-2] e [+2, +6]

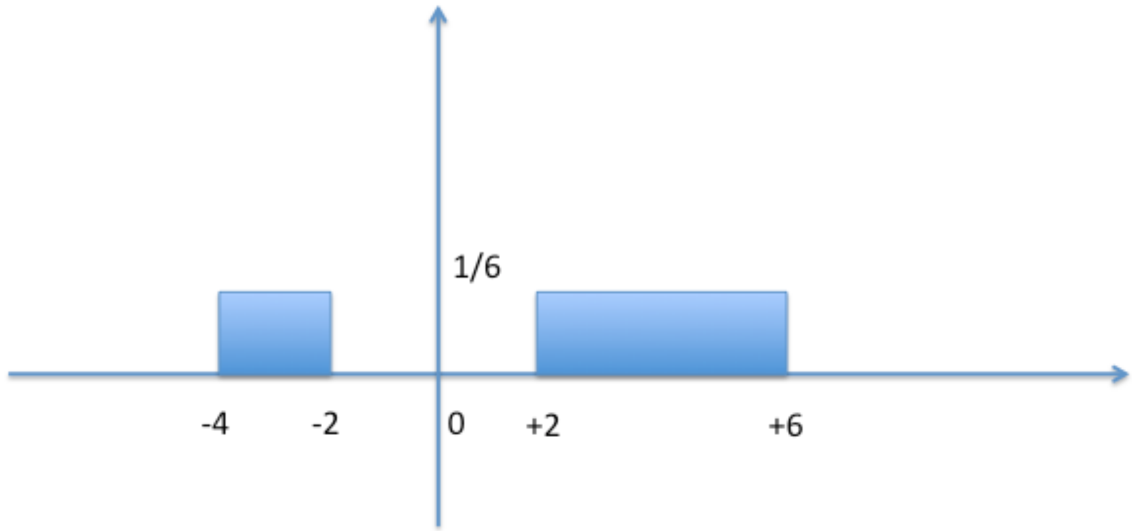
. b) sintetizzare una variabile Y avente densità di probabilità $f_Y(x) = 2(x+1) \quad -1 \leq x \leq 0$

Soluzione :

1) a) P(X >= 1.5) = P(X >= 3/2) = (7/4-3/2)*1 = **1/4**
b)
- Se U è compreso fra 0<=U <= 1/4, pongo X=-1
- Se U è compreso fra 1/4<U <= 1 -> U+3/4 sarà uniforme ("distribuzione "piatta") compresa fra +1 e +7/4, come desiderato.

- Riassumendo, per sintetizzare la nostra v.a., semplicemente porro':
se 0<=U <= 1/4-> X=-1
se 1/4 <U <= 1-> X=U+3/4

2) **a)** Il supporto della variabile aleatoria che vogliamo sintetizzare è compreso fra -4 e -2 (ampiezza = 2) e tra +2 e +6 (ampiezza uguale a 4). Ecco la distribuzione di probabilità:



Procedo a sintetizzare questa variabile aleatoria "spezzando" il procedimento in due parti: sintetizzo prima la "parte" della distribuzione compresa fra 43 e -2. L'area di questa parte è pari a 1/3

Procedo in questo modo: data U la nostra v.a. Uniforme fra 0 e 1:

- se 0<= U<= 1/3 allora moltiplicando per 6 ho -> 6U sarà uniforme ("distribuzione "piatta") compreso fra 0 e +2. Quindi 6U-4 sarà sempre uniforme ("piatta") tra -4 o -2, come desiderato.

- se 1/3< U<= 1 allora moltiplicando per 6 ho -> 6U sarà uniforme ("distribuzione "piatta") compreso fra +2 e +6, come desiderato.
- Riassumendo, per sintetizzare la nostra v.a., semplicemente porro':
  se 0<= U<= 1/3 -> X=6U-4
  se 1/3< U<= 1 -> X=6U

2b) Utilizziamo il metodo del percentile: calcoliamo la funzione di ripartizione F(U), che è pari all'integrale

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} 2(y+1)dy = \left[2\,\frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-1}^{x} = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

Ora inverto la F_X e la applico alla v.a. U, ovvero:

$$U = (X+1)^2 \text{ da cui } \boldsymbol{X = -1 + \sqrt[2]{U}}$$

Domande

1)Si enunci e si dimostri con chiarezza e precisione il Teorema di Little (*Little's Result*), riportando la dimostrazione di Stidham.

2)Si enunci con chiarezza e precisione il Teorema di Burke, indicandone inoltre qual è l'utilità nello studio delle reti di code.