

Computabilità

Mario Verdicchio

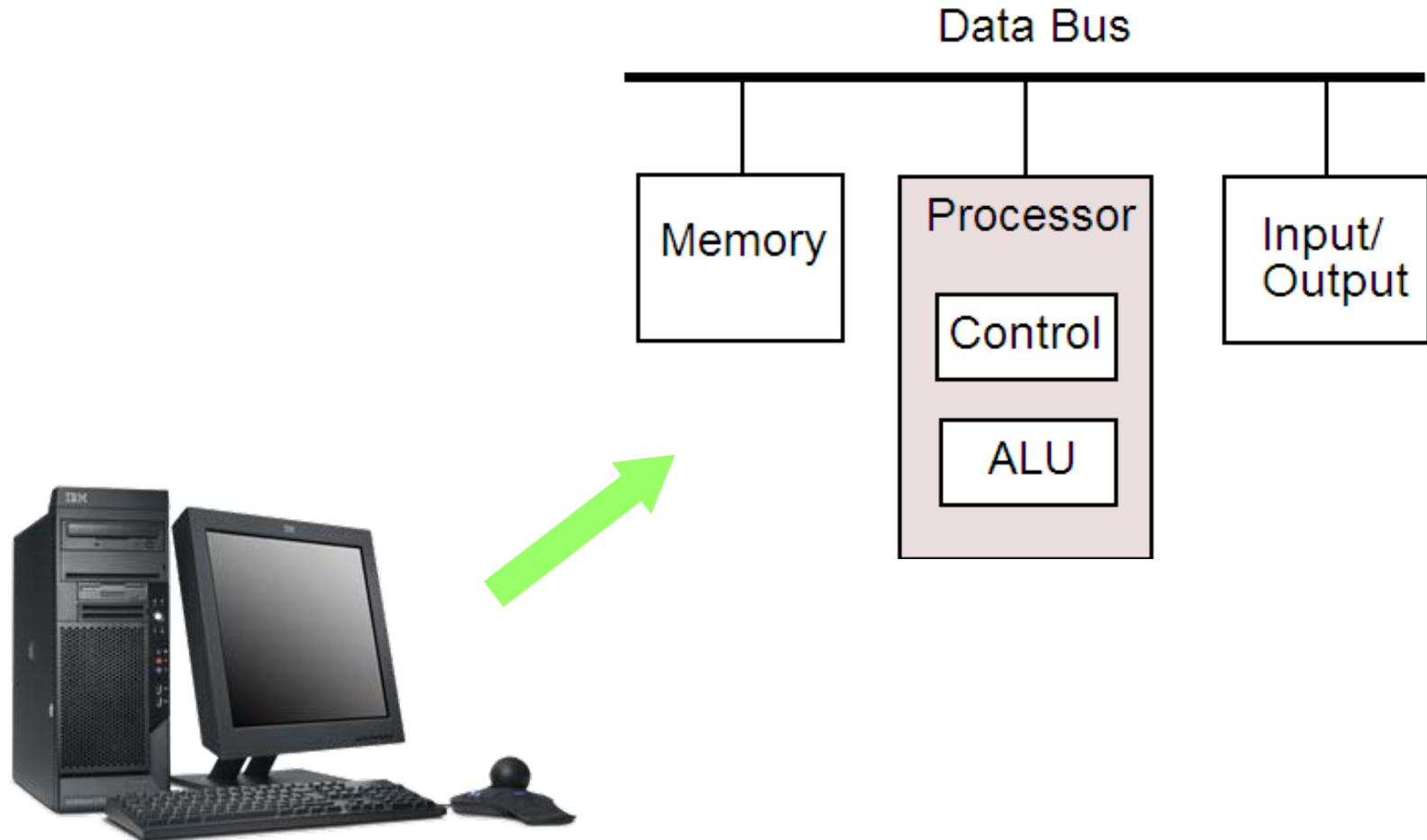
Definizione di computabilità

- La facoltà di essere computato
- Computare: stabilire per mezzo di strumenti matematici
- Computer: dispositivo (solitamente elettronico) programmabile che immagazzina, recupera, ed elabora dati

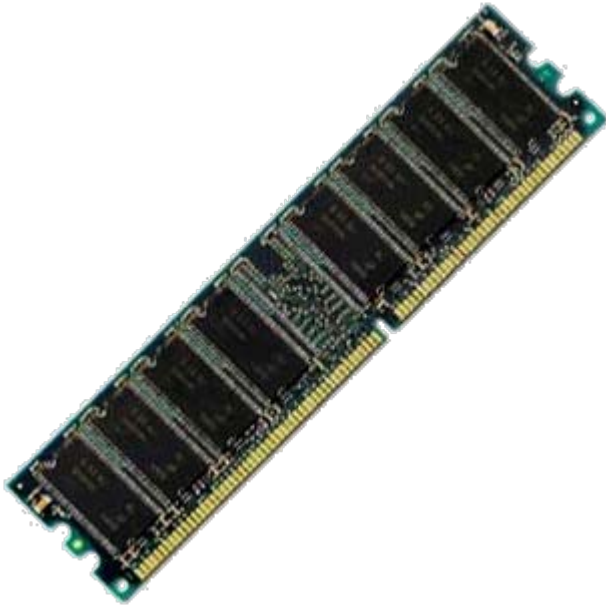
Solo matematica con il computer?



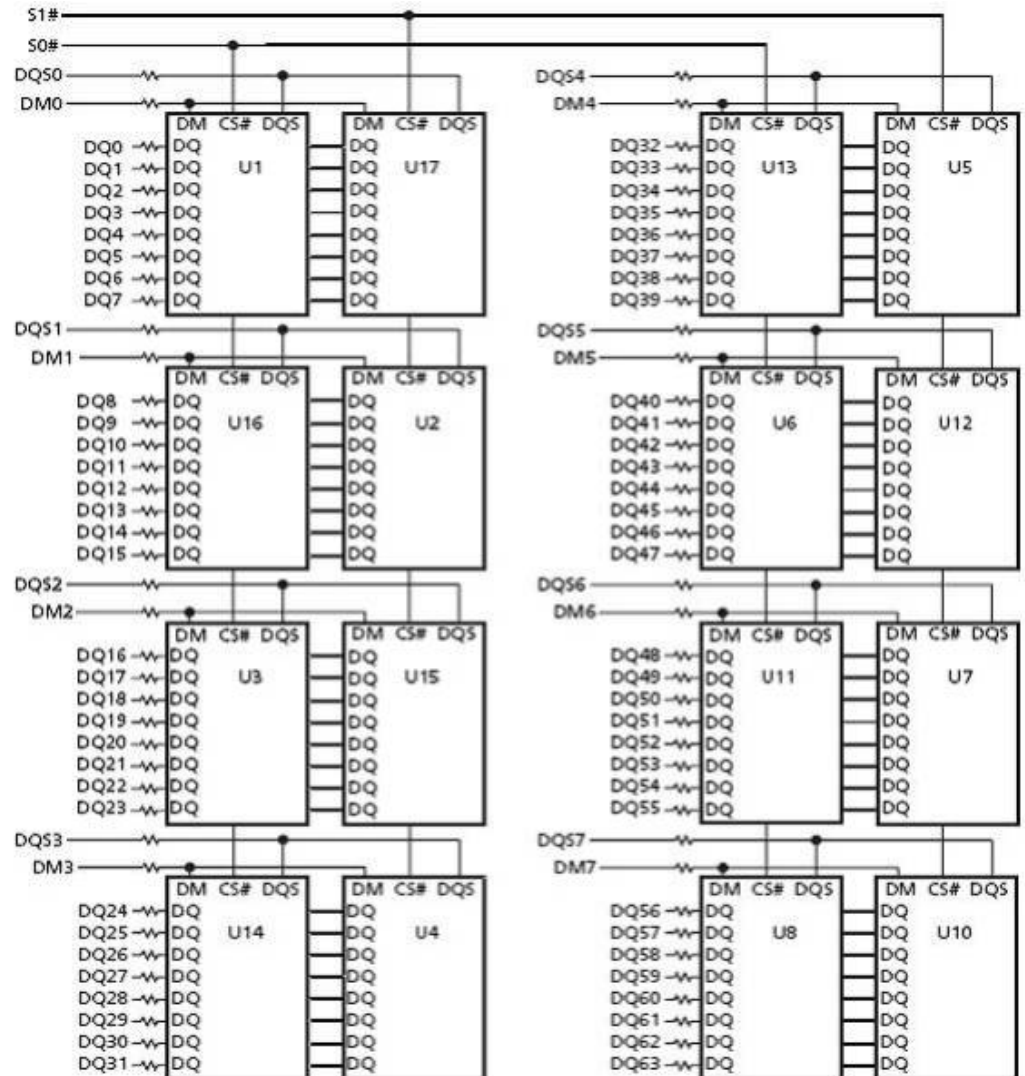
Architettura di Von Neumann



La memoria

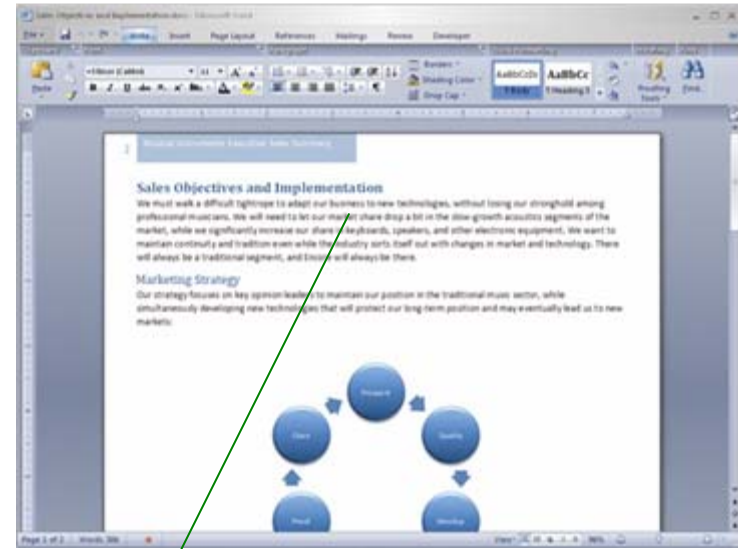
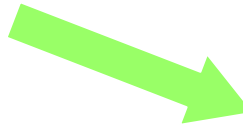


01001010100011101010100111100011
01001010100011101010100111100011
01001010100011101010100111100011
01001010100011101010100111100011
01001010100011101010100111100011





(x,y,R,G,B)
(330,276,14,56,234)

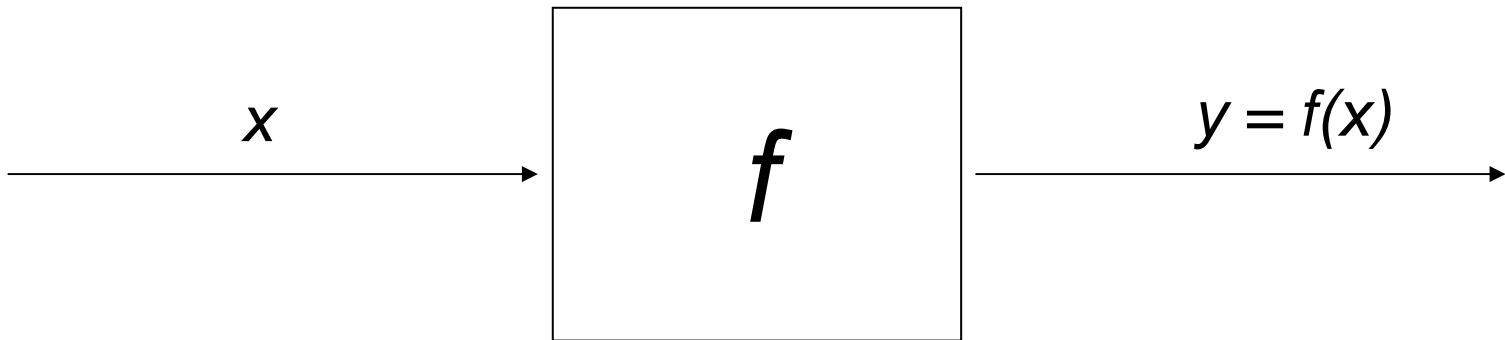


carattere 'r'
codice ASCII = 114



```
01001010100011101010100111100011
01001010100011101010100111100011
01001010100011101010100111100011
```

I programmi come funzioni



Funzioni totali

- Definizione di funzione: dati due insiemi A e B si dice funzione da A a B ($f:A \rightarrow B$) un insieme $f \subseteq A \times B$ tale che
 1. se $\langle x, y \rangle \in f$ e $\langle x, z \rangle \in f$, allora $y = z$;
 2. per ogni $x \in A$, esiste un $y \in B$ tale che $\langle x, y \rangle \in f$

Funzioni parziali

- Definizione di funzione: dati due insiemi A e B si dice funzione da A a B ($f:A \rightarrow B$) un insieme $f \subseteq A \times B$ tale che
 1. se $\langle x, y \rangle \in f$ e $\langle x, z \rangle \in f$, allora $y = z$;
 2. per ogni $x \in A$, esiste un $y \in B$ tale che $\langle x, y \rangle \in f$

Esempio

- La funzione $/: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è definita per $y=0$, ossia non esiste alcuna x né alcuna z tale che $\langle x, 0, z \rangle \in /$, ossia $x/y=z$
- Una funzione non definita per tutte le x si dice parziale



Un programma

```
int f(int x) {  
    if (x==0)  
        return 0;  
    else  
        return (x + f(x-2));  
}
```

Output non definito

- Nel caso il calcolo sia affidato a un calcolatore, ci possono essere due modi in cui la mancanza di output si manifesta:
 1. il compilatore segnala un errore (division by zero)
 2. l'esecuzione del programma non termina

Computabilità

- Una funzione $f:A \rightarrow B$ si dice computabile se esiste un algoritmo che la calcola
- ovvero esiste un programma che, data una qualunque $x \in A$ come input, termina la propria esecuzione producendo la $y \in B$ in output, con $y = f(x)$

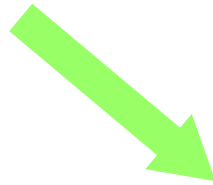
Computabilità delle funzioni parziali

- Anche una funzione parziale può considerarsi computabile
- Una funzione parziale $f:A\rightarrow B$ si dice computabile se esiste un algoritmo che la calcola
- ovvero esiste un programma che, data come input una qualunque $x\in A$ per la quale la f è definita, termina la propria esecuzione producendo la $y\in B$ in output, con $y = f(x)$

L'halting problem

P

X



Il problema come funzione

- Anche il problema dell'arresto può essere visto come una funzione matematica
- L'input è la coppia $\langle \text{programma}, \text{input} \rangle$
- L'output può essere “sì”, oppure “no”
- La funzione f_{halt} è computabile?

Supponiamo che lo sia...

- Il programma Q computa f_{halt}
- Dato $\langle P, x \rangle$ come input, il programma Q termina e restituisce “sì” se il programma P con input x termina
- Dato $\langle P, x \rangle$ come input, il programma Q termina e restituisce “no” se il programma P con input x non termina

Creiamo un programma D

- Il programma D chiama al suo interno il programma Q

```
string D(string z) {  
    if (Q(z,z) == "sì")  
        while(1) { ; } ;  
    else /* Q(z,z) == "no" */  
        return ("sì");  
}
```

Come si comporta D?

- $D(P)$ termina se $Q(P,P)$ restituisce “no”, ovvero $P(P)$ non termina, ossia il programma P con input il testo del programma P stesso va in loop
- $D(P)$ non termina se $Q(P,P)$ restituisce “sì”, ossia il programma P con input il testo del programma P stesso termina
- D è anch'esso un programma, quindi è una stringa che può fare da input...a D stesso
- Che succede se vogliamo calcolare $D(D)$?

D(D)?

- D(D) termina, cioè Q(D,D) restituisce “no”, cioè il programma D con input D non termina, cioè D(D) non termina
- D(D) non termina, cioè Q(D,D) restituisce “sì”, cioè il programma D con input D termina, cioè D(D) termina

Assurdo

- In ogni caso si raggiunge una situazione assurda in cui qualcosa è vero e falso contemporaneamente
- Il problema è supporre che esista il programma Q
- Il programma Q non esiste, ossia la funzione f_{halt} non è computabile