Preappello - 31 Maggio 2007

Tempo a disposizione per lo svolgimento: <u>1 ora e 30 minuti</u>
<u>Avvertenza:</u> Si ricordi di indicare sui fogli consegnati nome, cognome e numero di matricola

Esercizio 1

Si consideri un sistema a code caratterizzato da due serventi e nessun posto in coda.
Si supponga che gli arrivi degli utenti siano "scoraggiati", ovvero avvengano con una frequenza λ_n così definita: $\lambda_n = \frac{\lambda}{n+1}$, ove *n* rappresenta il numero di utenti già presenti nel sistema al momento del nuovo arrivo. Il tempo di trasmissione sia una variabile casuale esponenziale negativa con media pari ad 1/μ secondi, indipendentemente dal servente utilizzato.

1)Si indichi per quali valori di λ (fissato μ) il sistema è stabile, ovvero raggiunge uno stato stazionario.
2)Si descriva, tramite una catena di Markov, il sistema in esame.
3)Si calcoli, in forma letterale, la distribuzione stazionaria del numero di pacchetti nel sistema.
4)Si definisca con precisione che cosa si intende per *stato di blocco* e *probabilità di blocco* di un sistema a coda.
5)Si determini il massimo valore di $\rho \equiv \frac{\lambda}{\mu}$ (ρ_{max})che permette al sistema di avere una probabilità di blocco inferiore od uguale a 0.3.

Si consideri quindi il caso λ= μ/2. In questa ipotesi:
6)Si calcoli la probabilità di blocco del sistema
7)Si calcoli il numero medio di pacchetti nel sistema

Soluzione

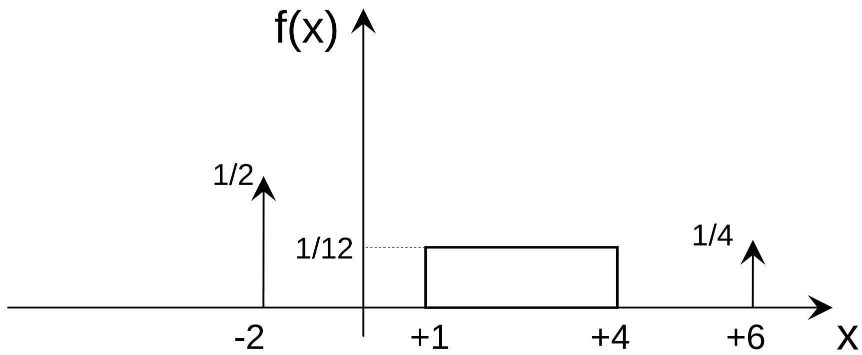
1)Il sistema è stabile per ogni lambda e mu.
2)La catena di Markov ha 3 stati (stato = n, numero di pacchetti nel sistema): gli stati sono: 0---1---2 con transizioni λ→λ/2, μ←2μ
3)Viene p0=1/(1+ρ+0.25*ρ^2), p1=ρ/(1+ρ+0.25*ρ^2) e p2=0.25*ρ^2/(1+ρ+0.25*ρ^2).
4)Si vedano i lucidi delle lezioni.
5) L'espressione di p2 è p2=0.25*ρ^2/(1+ρ+0.25*ρ^2). Se la uguaglio e 0.3 e risolvo per ρ ottengo ρ_{max}=2.4221, che dà appunto p2(ρ=2.4221)=0.3
6)Poiché si suppone λ= μ/2, ciò significa ρ=0.5, per cui la probabilità di blocca diventa p2(ρ=0.5)=0.04.
7)N=p1+2*p2=0.32+0.04=0.4

Esercizio 2

Sia U una variabile aleatoria a distribuzione uniforme in [0,1].
Si indichi un procedimento per:
1)sintetizzare una variabile aleatoria X uniforme negli intervalli [-3,-1] e [+2, +5]

2)sintetizzare una variabile avente densità di probabilità $f_X(x) = (x+1) \quad 0 \le x \le \sqrt[2]{3} - 1$

3)sintetizzare una variabile avente densità di probabilità f(x) indicata nella seguente figura:



<u>**SOLUZIONE**</u>**:**

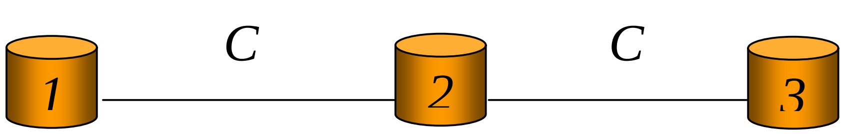
1)Se U< 2/5 , X=5U-3, se U>=2/5, X=5U
2)viene F_X(x)=x^2/2+x. Inverto: x^2+x=U e ottengo: x=-1+-sqrt(1+2U), di cui tengo ovviamente solo la soluzione positiva: X=-1+sqrt(1+2U)

3)Se U<1/2: X=-2
Se 1/2 <= U < 3/4: X=12U-5
Se U>=3/4, X=+6

<u>*Esercizio 3*</u>

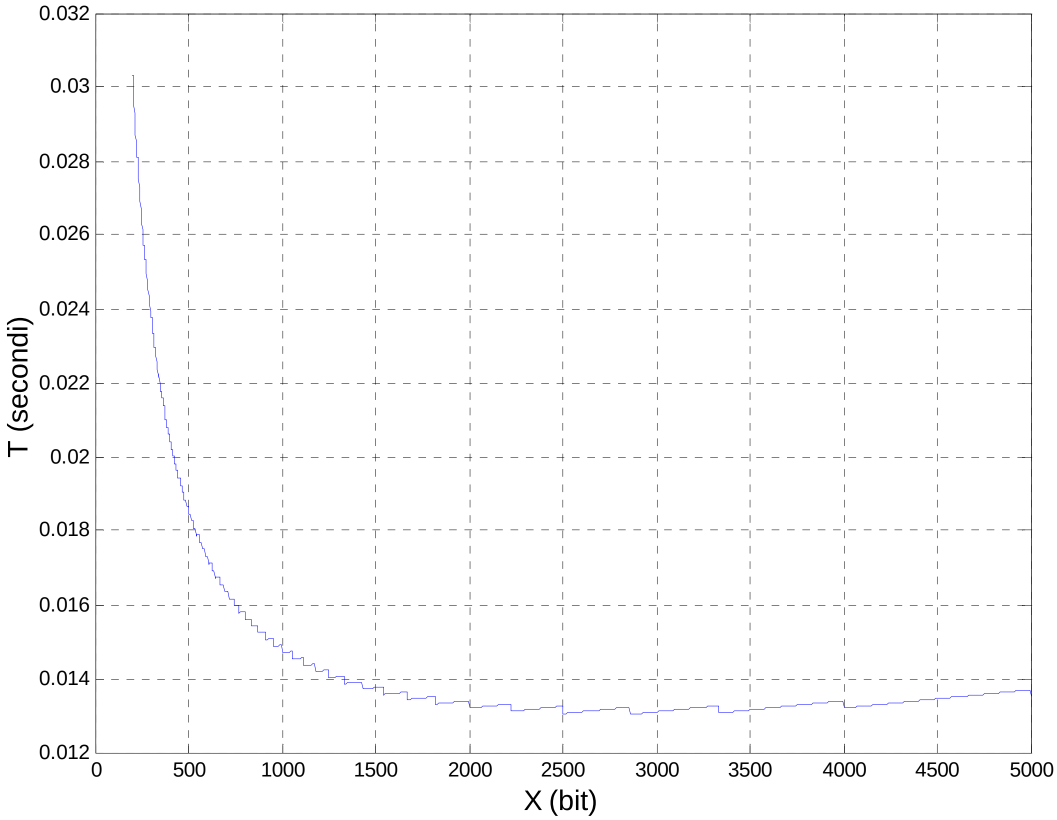
Si consideri la rete rappresentata in figura, in cui la velocità di trasmissione è la stessa per tutti i collegamenti e pari a C= 2 Mbit/s. Si suppongano trascurabili i ritardi di propagazione sui vari collegamenti.
Il nodo 1 vuole trasferire al nodo 3 un messaggio lungo L=20000 bit. Sia X la dimensione massima del payload di un pacchetto, e H=400 bit la lunghezza dell'header di ciascun pacchetto.

Si chiede di:
1)calcolare il tempo complessivo *T* necessario per trasferire il messaggio, in funzione di X.
1bis)(<u>facoltativo</u>) disegnare qualitativamente l'andamento di *T* al variare di X.
2)determinare il valore di X che minimizza tale tempo *T* di trasferimento del messaggio
(<u>Nota</u>: nel risolvere il punto 2 si utilizzi l'approssimazione $\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil \cong \frac{a}{b} + \frac{1}{2}$)



<u>**SOLUZIONE**</u>
1)Ovviamente impongo X<=L
T=(X+H)*1/C + L/C+ceil(L/X)*H/C, ove H,C ed L sono noti, l'unica incognita è X.
-Se approssimo ceil(L/X) con (L/X)+1/2, viene:
T=(X+H)*1/C + L/C+ (L/X+1/2)*H/C

1bis)



2)Derivando rispetto ad X viene: dT/dX= 1/C-LH/(C*X^2)=0
Da cui: 1/C=LH/(C*X^2), ovvero 1=LH/(X^2), ovvero X^2=LH
X^2= 8000000, per cui X=2828 bit
Per cui ottengo Tmin=T(X=2828)= 0.01321s
-(non richiesto dal tema d'esame) Senza approssimazione viene (usando MATLAB ad esempio): Tmin=0.01303s, e Xmin=2858bit

Domande

1) Si enunci con precisione il Teorema di Burke, indicandone inoltre qual è l'utilità nello studio delle reti di code.

2a) Si illustri con precisione che cosa si intende per *protezione dedicata* e *protezione condivisa (shared)* nelle reti di telecomunicazione.
2b)<u>(facoltativo)</u> Con riferimento alle reti ottiche, si illustri qual è la differenza fra protezione dedicata 1:1 e 1+1.

Si vedano i lucidi delle lezioni