Università di Bergamo
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
e Metodi Matematici

Reti di Telecomunicazione

Seminario sulla
Simulazione dei sistemi di comunicazione

Fabio Martignon

Sommario

- Cos'è la simulazione e a cosa serve
- Sistemi, modelli e variabili
- Simulazione ad eventi discreti
- Generazione di numeri pseudo-casuali e sintesi di variabili aleatorie
- Analisi statistica dei risultati
- Esempi di simulatori in C/C++
- Strumenti general purpose: OPNET, OMNET, NS, Glomosim …
- Progetto facoltativo: simulazione di sistemi di telecomunicazione

Introduzione alla simulazione

- **Perché dopo aver studiato tutta la teoria delle code adesso ci tocca anche vedere la simulazione?**
- **La teoria delle code non basta per determinare le prestazioni delle reti di telecomunicazione?**
- **NO:**
  - **La teoria delle code riesce a descrivere e a dare risultati per un piccolo insieme di sistemi e modelli molto semplificati**
  - **Come si possono studiare infatti:**
    - **Code con arrivi non Poisson: arrivi deterministici, arrivi a gruppi, ritorno di richieste rifiutate, ecc.**
    - **code con meccanismi di gestione delle code complessi (WRR, WFQ, RED, ecc.)**
    - **reti di code che non soddisfano le ipotesi di Jackson**
    - **comportamenti in transitorio dei sistemi a coda**

Introduzione alla simulazione

- Inoltre esistono sistemi di comunicazione o loro parti che non possono essere facilmente descritti con modelli di sistemi a coda:
  - interfaccia d'accesso di sistemi wireless (GSM, WLAN, ecc.) con errori dovuti alle caratteristiche del canale e all'interferenza
  - meccanismi di routing dinamico in reti IP
  - meccanismi di controllo di congestione (es. TCP)
  - meccanismi di controllo d'ammissione
  - protocolli di ritrasmissione complessi quali, ad esempio, protocolli con piggybacking, selective reject, ecc.
- Quando si parte dai sistemi reali è abbastanza difficile riuscire a trovare un modello risolvibile solo con la teoria delle code

Introduzione alla simulazione

- **Cos'è la SIMULAZIONE:**
  - ***La simulazione cerca di costruire un dispositivo sperimentale che si comporti come il sistema reale sotto analisi per alcuni importanti aspetti***
  - **Esempi:**
    - **modellini in scala della superficie esterna di aerei, automobili, treni utilizzati nelle gallerie del vento**
    - **SimCity, Railroad Tycoon, e altri videogame basati sulla riproduzione del funzionamento di un sistema**
    - **simulatori di volo per l'addestramento di piloti**

Introduzione alla simulazione

- **Altri:**
  - predizione dello sviluppo di ecosistemi dopo un’alterazione artificiale
  - verifica di tattiche di investimenti in borsa
  - previsioni del tempo
  - verifica di tattiche di guerra (almeno sono solo simulate!)
  - ecc.

Introduzione alla simulazione

- Cosa fornisce la simulazione:
  - la simulazione è “descriptive” e non “prescriptive”
  - la simulazione fornisce informazioni sul comportamento del sistema dati i parametri
  - la simulazione NON dice come settare i parametri per ottenere il miglior comportamento del sistema, o per verificare i limiti del sistema
  - Esempio: M/M/1
    - vedo subito il limite di capacità

$$D = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

    - se simulo il sistema devo fare tante simulazioni aumentando il carico fino a che non scopro il limite

Introduzione alla simulazione

- Classificazioni:
- Esistono molti modi per classificare le simulazioni, tutti mediamente poco utili
- Vedremo le differenze con degli esempi in seguito, ma qui iniziamo con qualcosa di base:
  - simulazioni deterministiche / casuali:
    - le simulazioni deterministiche sono completamente definite dal modello e la loro evoluzione è legata deterministicamente ai parametri d'ingresso;
    - le simulazioni casuali sono basati su modelli che includono variabili o processi casuali e necessitano della generazione di variabili casuali; l'evoluzione del modello dipende dai parametri d'ingresso e dalla generazione delle variabili casuali

Introduzione alla simulazione

- **Classificazioni:**
- **Esempi**
  - **simulazione deterministica:**
    - si adotta un complesso modello per la descrizione del moto delle bocce sul tavolo di biliardo; note posizione delle bocce, punto-velocità-direzione di impatto con la stecca, si vuol sapere l'esito di un colpo senza risolvere in modo esplicito il modello in modo analitico
  - **simulazione casuale:**
    - si consideri una cella GSM con N canali alla quale arrivano delle richieste di connessione secondo un processo di Poisson di tasso λ. Si vuol determinare la probabilità di rifiuto sapendo che con probabilità p le chiamate rifiutate ritentano l'accesso esattamente dopo un tempo pari a T.

Introduzione alla simulazione

- Classificazioni:
- Tra le simulazioni casuali possiamo distinguere quelle statiche e quelle dinamiche
- simulazioni statiche
  - dette anche simulazioni Monte-Carlo
  - la variabile tempo NON gioca alcun ruolo
  - lo scopo fondamentale è determinare alcune caratteristiche statistiche di una o più variabili casuali
  - di fatto le simulazioni Monte-Carlo implementano misurazioni statistiche su esperimenti ripetuti in modo indipendente;

Introduzione alla simulazione

- **simulazioni dinamiche**
  - dette anche temporali
  - il tempo diventa la variabile principale da legare all'evoluzione del modello
  - lo scopo è la raccolta di dati statistici su processi casuali osservati al variare del tempo
  - le osservazioni sono critiche perché:
    - al contrario delle prove ripetute, non si ha il vantaggio della indipendenza statistica ma occorre tener conto della correlazione delle osservazioni
    - non si può sapere a priori se il processo osservato è ergodico (il sistema è stabile o lo si sta osservando in transitorio)

Introduzione alla simulazione

- Esempio di simulazione Monte-Carlo
- Esempio semplice (si risolve anche analiticamente):
  - Si consideri un sistema d'accesso multiplo casuale slottizzato con 10 utenti di tipo A, 10 utenti di tipo B e 13 utenti di tipo C. Tutti gli utenti hanno sempre un pacchetto pronto per la trasmissione e gli utenti A, B e C trasmettono in ogni slot con probabilità 3p, 2p e p rispettivamente. Si trovi il throughput del sistema dato p. Si determini il valore di p che massimizza il throughput.

Introduzione alla simulazione

- Esempio di simulazione Monte-Carlo
- Esempio più complesso:
  - Si consideri un sistema cellulare a pacchetto nel quale ad ogni intervallo temporale viene trasmesso in ogni cella un pacchetto con probabilità G da una stazione mobile posta in posizione casuale. L'attenuazione del canale sia funzione della distanza e di un fattore casuale (fading) e la potenza trasmessa sia fissa. Il pacchetto viene ricevuto correttamente solo se il rapporto segnale/interferenza è maggiore di 6 dB. Determinare la probabilità di successo di una trasmissione. Si determini il valore di G che massimizza il throughput.

Introduzione alla simulazione

- **Esempio di simulazione Temporale**
- **Esempio 1:**
  - **Si consideri un sistema a coda con un servente e K posti in coda. I tempi di interarrivo siano una variabile casuale uniforme tra a e b e ogni arrivo sia composto da un un numero x di utenti, dove x è una v.c. Binomiale di ragione p. Si determini la probabilità di rifiuto e il ritardo medio di attraversamento.**

Introduzione alla simulazione

- **Esempio di simulazione Temporale**
- **Esempio 2:**
  - **Si consideri un sistema di polling slottizzato con N code. Ad ogni coda arrivino pacchetti di lunghezza x, v.c. con pdf nota, secondo un processo di Poisson con tasso λ . Nell'ipotesi che:**
    - **il servente adotti una politica di polling esaustiva (continua a servire una coda fino a che è vuota)**
    - **scelga la coda successiva secondo il criterio della coda più lunga**
  - **si determini il tempo medio di attraversamento del sistema**

Introduzione alla simulazione

- La simulazione unita ai linguaggi di programmazione e alla velocità dei moderni elaboratori costituisce uno strumento potente di analisi in grado di risolvere anche problemi complessi
- Ma la simulazione è anche uno strumento che deve essere usato con cura per le seguenti ragioni:
  - non è facile validare i risultati ottenuti
  - la natura statistica dei risultati e la scarsa conoscenza del sistema rende difficile l'analisi dell'output
  - il tempo computazionale può facilmente essere molto elevato
  - non è facile capire come i diversi parametri influenzano il risultato

Modelli e sistemi

- **Sistema:**
  - è un concetto molto generale che possiamo definire in modo informale come collezione di parti dette componenti che interagiscono tra loro in modo tale che il funzionamento dell'insieme soddisfi certe specifiche
- **Modello:**
  - il modello è una rappresentazione del sistema. Tale rappresentazione può assumere varie forme (ad es. quello della replica fisica), ma qui ci si focalizzerà sulla rappresentazione mediante metodi matematici (modello matematico).

Modelli e sistemi

- **Stato:**
  - **lo stato del sistema descrive la condizione istantanea di tutti i suoi componenti**
  - **allo stato del sistema corrisponde uno stato del modello del sistema, e il modello rappresenta l'evoluzione del sistema mediante la storia dei passaggi di stato**
  - **lo stato del modello risulta semplificato rispetto allo stato del sistema**
  - **si parla di *livello di astrazione* del modello ad indicare che alcune caratteristiche dello stato del sistema sono omesse**
  - **il livello di astrazione è strettamente funzionale alle misure che si vogliono effettuare sul modello**
  - **il miglior modello è <u>il più semplice</u> che consente di ottenere le misure (prestazionali) desiderate**

Modelli e sistemi

- **Variabili**
  - un modello matematico è descritto utilizzando variabili
  - le attività del modello sono descritte come relazioni o funzioni tra variabili
  - variabili di stato:
    - le variabili di stato definiscono in modo completo lo stato del modello e la loro evoluzione definisce l'evoluzione del sistema
  - variabili d'ingresso:
    - le variabili d'ingresso sono parametri da cui dipende il modello e che descrivono sollecitazioni esterne al sistema in esame

Modelli e sistemi

- variabili d'uscita:
  - sono funzione delle variabili di stato e di quello di ingresso e rappresentano le grandezze del modello che si intende misurare
  - rappresentano dunque le *sonde* inserite nel modello per la misura
  - la soluzione del modello consiste nell'ottenere i valori delle variabili d'uscita
  - la <u>soluzione analitica</u> di un modello coinvolge ad esempio metodi matematici di risoluzione di equazioni che descrivono le relazioni tra le variabili
  - la <u>soluzione simulata</u> di un modello consiste invece nel riprodurre l'evoluzione del sistema mediante l'evoluzione delle variabili di stato e nella misurazione diretta delle variabili d'uscita

Simulazione ad eventi discreti

- Alcuni modelli sono caratterizzati dalla proprietà che le variabili di stato cambiano valore solo ad istanti discreti di tempo
- il cambiamento di stato del sistema prende il nome di evento ed è caratterizzato da un istante di occorrenza (un evento non ha durata);
- al contrario l'attività rappresenta una condizione del sistema che perdura per un certo tempo ed è solitamente caratterizzata da un evento di inizio ed un evento di fine
- ad esempio l'inizio e la fine della trasmissione di un pacchetto sono eventi, mentre la trasmissione stessa è un'attività
- la simulazione ad eventi discreti è di fondamentale importanza per le reti di telecomunicazione

Simulazione ad eventi discreti

- **Nella simulazione ad eventi discreti effettuata al calcolatore occorre:**
  - **definire i tipi di eventi che possono verificarsi**
  - **definire per ogni evento le modifiche da apportare allo stato del sistema**
  - **definire una variabile temporale ed ordinare gli eventi in un *calendario* sulla base dell’istante di occorrenza**
  - **definire uno stato iniziale**
  - **scorrere il calendario ed ogni volta che si incontra un evento eseguire le modifiche alle variabili di stato corrispondenti a quell’evento**
  - **effettuare misure sulle variabili d’uscita**

Simulazione ad eventi discreti

- **La simulazione di un modello stocastico coinvolge delle variabili d'ingresso di tipo casuale**
- **il modello di simulazione coinvolge di solito la descrizione delle caratteristiche statistiche delle variabili d'ingresso**
- **per la simulazione al calcolatore occorre far uso della <u>generazione di numeri pseudo-casuali</u> e della sintesi di variabili aventi le caratteristiche descritte dal modello (prossimo argomento ...)**
- **esempio: traffico in ingresso di un sistema a coda descritto mediante il processo degli arrivi e il processo dei tempi di servizio**

Simulazione ad eventi discreti

- Esempio: Simulazione di un sistema a coda
  - Modello:
    - sistema a coda con un servente e infiniti posti in coda
    - variabili di ingresso:
      - » tempi di interarrivo delle richieste
      - » tempi di servizio delle richieste
    - variabile di stato:
      - » numero di richieste nel sistema
      - » stato iniziale: nessun utente nel sistema
    - variabile d'uscita:
      - » tempo medio nel sistema

Simulazione ad eventi discreti

- **Esempio: Simulazione di un sistema a coda**
  - **Definizione degli eventi: primo tentativo**
    - **arrivo utente**
    - **inizio servizio**
    - **fine servizio**

Problemi:
- non si può schedulare l'inizio
- inizio e fine possono essere contemporanei

  - **Definizione degli eventi: secondo tentativo**
    - **arrivo utente**
    - **fine servizio**

    In questo caso occorre distinguere sulla base dello stato:
    - **arrivo utente in sistema vuoto (inizio immediato servizio)**
    - **arrivo utente con sistema non vuoto**
    - **fine servizio con coda vuota**
    - **fine servizio con coda non vuota (inizio immediato servizio)**

Simulazione ad eventi discreti

- **Esempio: Simulazione di un sistema a coda**
  - **Riempimento del calendario degli eventi**
    - **estrazione dei tempi di arrivo e inserimento nel calendario degli eventi arrivo corrispondenti**
    - **estrazione dei tempo di servizio.**
    - **PROBLEMA: non è possibile inserire gli eventi fine servizio di ciascuna richiesta senza sapere lo stato del sistema**
    - **SOLUZIONE: il calendario può essere popolato di altri eventi durante la sua scansione temporale**

Simulazione ad eventi discreti

- Esempio: Simulazione di un sistema a coda
  - Riempimento del calendario degli eventi
    - → quando viene scandito un evento arrivo e il sistema è vuoto viene inserito un nuovo evento fine nel calendario ad un tempo pari a CLOCK più il valore del tempo di servizio
    - → quando viene scandito un evento fine servizio con coda non vuota viene inserito un nuovo evento fine nel calendario ad un tempo pari a CLOCK più il valore del tempo di servizio
  - Modifica dello stato:
    - arrivo utente: incremento del numero di richieste
    - fine servizio: decremento del numero di richieste

Simulazione ad eventi discreti

- Esempio: Simulazione di un sistema a coda
  - Misura variabile uscita:
    - arrivo utente: memorizzazione tempo d'arrivo
    - fine servizio: calcolo del tempo di attraversamento (CLOCK - t_arrivo)
  - Perché popolare il calendario tutto all'inizio?
    - È possibile generare il primo evento di arrivo all'inizio della simulazione
    - poi basta far generare all'interno della scansione dell'evento arrivo l'evento relativo al prossimo arrivo mediante la generazione della variabile pseudo-casuale del tempo di inter-arrivo

Simulazione ad eventi discreti

- **Gestione degli eventi:**

l'esecuzione della scansione di un evento (in gergo: *corpo dell'evento*) provoca

  - **modifica dello stato del modello sulla base del:**
    - » **tipo di evento**
    - » **stato del modello all'istante di occorrenza**
  - **generazione di nuovi eventi e inserimento di questi nel calendario**

- **L'inserimento ordinato di un nuovo evento nel calendario è una operazione critica se il calendario contiene molti eventi**
  - **occorre utilizzare tecniche di inserimento in liste ordinate di tipo efficiente**

Simulazione ad eventi discreti

- Modalità di scorrimento della variabile CLOCK
  - quando la variabile CLOCK viene fatta avanzare a step fissi si parla di simulazioni "clock driven"
  - quando la variabile CLOCK viene fatta avanzare a salti dal tempo di occorrenza di un evento a quello di occorrenza dell'evento immediatamente successivo si parla di simulazioni "event driven"
  - la distinzione tra i due tipo di simulazioni è molto comune ma legata solo alla modalità di implementazione del software e non alle caratteristiche del modello
  - dal punto di vista computazionale può essere conveniente adottare un metodo piuttosto che un altro in base al modello

Il ruolo dei numeri casuali

- Quando il modello coinvolto nella simulazione è stocastico, nascono due problemi importanti di cui tenere conto:
  - la generazione di numeri pseudo-casuali da usare per le variabili d'ingresso del modello
  - la valutazione statistica dei risultati ottenuti dalle variabili d'uscita

Generazione di numeri pseudo casuali

- **I numeri generati da un computer non possono essere casuali in senso stretto a causa del comportamento strettamente deterministico del computer**
- **Si possono però generare delle sequenze *pseudo casuali* che soddisfano ad una serie di test statistici di casualità**

Generazione di numeri pseudo casuali

- La problematica della generazione di numeri pseudo-casuali mediante un elaboratore elettronico può esser logicamente divisa in due parti:
  - generazione di sequenze casuali di numeri uniformemente distribuiti tra 0 ed 1
  - generazione di sequenze casuali di numeri distribuiti in modo arbitrario

Generazione di numeri pseudo casuali

- Le sequenze pseudo-casuali si ottengono mediante l'implementazione di formule ricorsive
- Il primo metodo usato per la generazione di sequenze è stato quello di Von Neumann del "centro del quadrato"
- il numero successivo era ottenuto elevando al quadrato il precedente e prendendo la cifra centrale
- tale metodo è stato abbandonato
- i metodi attualmente usati sono tutte varianti del metodo della "congruenza lineare"

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Modulo:**

$$x \bmod y = x - y\lfloor x / y \rfloor$$

  - **proprietà:**

$$0 \leq \frac{x \bmod y}{y} < 1$$

- **Congruenza:**

$$x \equiv y \pmod z$$

$$x \bmod z = y \bmod z$$

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Metodo della Congruenza lineare (Lehmer 1948)**

$$\{X_n\}_{n \in N} = X_0, X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$$

- **Tale che:**

$$X_{n+1} \equiv aX_n + c \quad (\operatorname{mod} m)$$

X_0 valore iniziale o SEME

a moltiplicatore

c incremento

m modulo

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Il metodo è detto:**
  - **moltiplicativo se c = 0**
  - **misto se c ≠ 0**
- **se il seme X_0, a, c ed m sono interi, la sequenza è una sequenza di interi compresi tra 0 ed $m-1$**
- **esempio:**
  - $X_0 = a = c = 7$
  - $m = 10$
  - $\{X_n\}_{n \in N} = 7, 6, 9, 0, 7, 6, 9, \ldots$

Generazione di numeri pseudo casuali

- Non appena $X_p = X_0$, la sequenza si ripete in modo periodico; p è il periodo della sequenza
- essendo $X_n < m$, il periodo non può che essere minore o uguale a m
- se p=m allora tutti i numeri tra 0 ed m-1 si ripetono una ed una sola volta nella sequenza
- per avere una sequenza in [0,1):

$$\{R_n\}_{n \in N} = \frac{X_0}{m}, \frac{X_1}{m}, \frac{X_2}{m}, \ldots, \frac{X_i}{m}, \ldots$$

Generazione di numeri pseudo casuali

- **E' possibile legare direttamente X_n a X_0, e ciò mette ancora di più in luce la natura deterministica della sequenza:**

$$X_1 = (aX_0 + c) \bmod m$$

$$X_2 = (aX_1 + c) \bmod m = (a^2 X_0 + (1+a)c) \bmod m$$

$$X_3 = (a^3 X_0 + \frac{a^3 - 1}{a - 1} c) \bmod m$$

$$\dots$$

$$X_n = (a^n X_0 + \frac{a^n - 1}{a - 1} c) \bmod m$$

Generazione di numeri pseudo casuali

- Scelta del modulo:
  - m influenza il periodo in quanto $p \leq m$
  - m influenza anche la velocità computazionale:
    - per calcolare un modulo occorre in generale fare una moltiplicazione, una somma e una divisione
    - è possibile fare tutto insieme se si sceglie come modulo il massimo numero intero rappresentabile dal calcolatore più uno
    - in questo modulo l'operazione di modulo equivale ad un troncamento
    - se b è il numero di bit usati dall'elaboratore si sceglierà $m=2^b$

Generazione di numeri pseudo casuali

- Scelta del moltiplicatore e dell'incremento:
  - moltiplicatore ed incremento influenzano il periodo p e le proprietà statistiche della sequenza
  - esistono delle regole per la scelta di a e c che consentono di ottenere periodi p=m
  - se il metodo è moltiplicativo (c=0) si può mostrare che se $m=2^b$ allora il massimo periodo vale $p=2^{b-2}$ se $b\geq 4$
  - in passato i metodi moltiplicativi erano considerati migliori; adesso è provata l'equivalenza degli approcci moltiplicativo e misto

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Altri metodi:**
  - **metodo quadratico congruente:**
    - si basa sulla generazione di numeri congruenti modulo m secondo la relazione:

$$X_{n+1} = (dX_n^{\ 2} + aX_n + c) \bmod m$$

  - **metodo di Fibonacci o additivo:**

$$X_{n+1} = (X_n + X_{n-k}) \bmod m$$

Generazione di numeri pseudo casuali

Cenni sui Test per i generatori:

- I test sui generatori di numeri pseudo-casuali tendono a verificare che:
  - i numeri generati siano distribuiti uniformemente
  - le generazioni risultino indipendenti
- questi concetti hanno però un valore solo per variabili aleatorie e devono trovare una loro implementazione in un test eseguito su un insieme finito di campioni
- in generale si assume verificata un'ipotesi se l'insieme di campioni supera un certo numero di test

Generazione di numeri pseudo casuali

Cenni sui Test per i generatori:

- **un tipico test per la verifica della distribuzione è il <u>test del</u> χ^2**
- **si divida l'insieme dei valori possibili in *k* categorie**
- **siano $\hat{Y}_i$ l'insieme di valori del campione che cadono nella categoria e sia invece $Y_i = np_i$ il valore atteso, dove *n* è il numero di campioni e p_i la probabilità relativa alla categoria *i* (p_i =1/k nel caso uniforme)**
- **un indice di qualità può essere**

$$V = \frac{(Y_1 - \hat{Y}_1)^2}{Y_1} + \frac{(Y_2 - \hat{Y}_2)^2}{Y_2} + \ldots + \frac{(Y_k - \hat{Y}_k)^2}{Y_k}$$

Generazione di numeri pseudo casuali

Cenni sui Test per i generatori: test del χ^2

- **il problema è che il valore di V è essa stessa una variabile casuale che, inoltre, dipende dai valori assoluti**
- **occorre dunque ripetere il test più volte su campioni differenti e valutare la probabilità che V assuma valori elevati**
- **si dimostra che V è ha una distribuzione χ^2 con n=k-1 gradi di libertà:**

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}; \quad x \geq 0$$

$$\frac{n}{2} \text{intero} : \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$$

Generazione di numeri pseudo casuali

Cenni sui Test per i generatori: <u>test del</u> χ^2

- **indicando con P_x il percentile x% della distribuzione χ^2 si classificano le osservazioni di V secondo la tabella:**

P_0-P_1, P_{99}-P_{100}	rigetto	●
P_1-P_5, P_{95}-P_{99}	sospetto	⊗
P_5-P_{10}, P_{90}-P_{95}	quasi-sospetto	❍

Generazione di numeri pseudo casuali

Cenni sui Test per i generatori: test del gap

- Per verificare l'indipendenza dei campioni esistono numerosi test
- un test spesso usato è il test del gap
- si definisce un evento sulla distribuzione osservata come ad esempio il superamento di una soglia
- si valuta la probabilità *p* associata all'evento
- dalla sequenza di campioni si deriva la sequenza di variabili (0,1) che definisce se l'evento è verificato o meno

Generazione di numeri pseudo casuali

Cenni sui Test per i generatori: <u>test del gap</u>

- **si considera la lunghezza prima delle sequenze di 0 e poi delle sequenze di 1**
- **essendo la distribuzione di queste lunghezze di tipo geometrico si verifica la congruenza con la distribuzione usando un test come ad esempio quello del χ^2**
- **oppure molto più semplicemente si valuta il valor medio e lo si confronta con *1-p* e *p* rispettivamente**

000111110010010010011100001001

⟷ ⇔ ⇔ ⇔ ⇔ ⇔ ⟷ ⇔

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Generazione di una distribuzione arbitraria:**
  - **Richiami di probabilità:**

Teorema fondamentale delle funzioni di v.a.:

La p.d.f. $f_Y(y)$ della v.a. $Y = g(X)$ è data da :

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

dove le x_i sono le soluzioni dell'equazione :

$$y = g(x)$$

che sono dunque funzioni di y, $x_i = x_i(y)$

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Esempio:**

  Sia X una v.a. con C.D.F pari a $F_X(x)$.

  Si consideri $Y = F_X(X)$

  Il teorema fondamentale consente di scrivere:

$$f_Y(y) = \frac{F'_X(x_1)}{F'_X(x_1)} = 1 \qquad 0 \leq y \leq 1$$

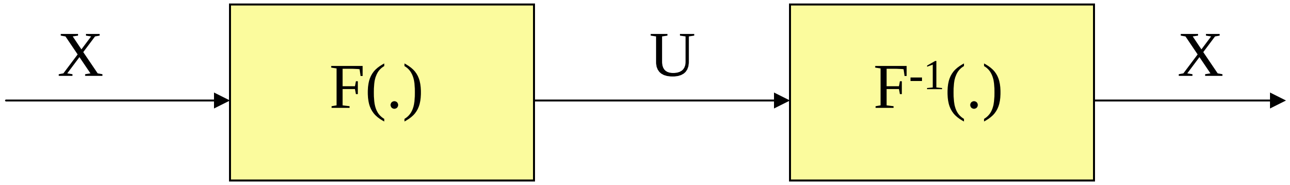
  dove le x_1 è l'unica soluzione dell'equazione

  $y = F_X(x)$ che esiste se e solo se $0 \leq y \leq 1$.

  Quindi x è uniforme in (0,1)!

Generazione di numeri pseudo casuali

- Sintesi di una v.a. mediante il **metodo del percentile**:
  - a questo punto è facile verificare che se si ha:
    - U v.a. uniforme in (0,1)
    - per ottenere una v.a. X con CDF pari a F(.) basta porre : $X = F^{-1}(U)$



Generazione di numeri pseudo casuali

- **Dimostrato in altro modo:**
  - **Sia U v.a. uniforme in (0,1)**

$$f_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad F_U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

- **Pongo:**

$$X = F^{-1}(U)$$

- **Risulta:**

$$F_X(t) = P\{X \le t\} = P\left\{F^{-1}(U) \le t\right\} = P\{U \le F(t)\} = F(t)$$

Generazione di numeri pseudo casuali

- **La variabile U si ottiene dai generatori di numeri pseudo casuali**
- **rimane il problema di trovare $F_r^{-1}(.)$ per la variabile che si vuole sintetizzare**
- **per alcuni processi la $F_r^{-1}(.)$ non è ottenibile in forma analitica e quindi occorre ricorrere ad altri metodi**
- **per le v.a. discrete occorre modificare leggermente l'approccio**

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Esempio: Esponenziale**
  - **si voglia generare una variabile aleatoria esponenziale negativa *x* con media λ > 0**

la pdf è :

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \quad x \geq 0$$

si ha :

$$F_X(x) = 1 - e^{-x/\lambda} \quad x \geq 0$$

e quindi

$$X = -\lambda \ln(1-U) \quad \text{oppure } X = -\lambda \ln \mathrm{U}$$

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Esempio: Rayleigh**
  - si voglia generare una variabile aleatoria con pdf di Rayleigh

la pdf è:

$$f_X(x) = xe^{-x^2/2} \qquad x \geq 0$$

si ha:

$$F_X(x) = 1 - e^{-x^2/2} \qquad x \geq 0$$

e quindi

$$X = \sqrt{-2\ln(1-U)} \quad \text{oppure} \quad \sqrt{-2\ln U}$$

Generazione di numeri pseudo casuali

- Esempio: Gaussiana
  - si voglia generare una variabile aleatoria x gaussiana con $\mu=0$ e $\sigma=1$
  - per avere una variabile con media μ e varianza σ^2 basta poi usare la trasformazione $z=\sigma x+\mu$
  - la pdf è

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

  - mentre la CDF, come noto, non è esprimibile direttamente e, quindi, non può essere invertita in modo esplicito

Generazione di numeri pseudo casuali

- Esempio: Gaussiana
  - un primo approccio è quello di ricorre ad una approssimazione
  - il teorema del limite centrale ci dice che la somma di N v.a. tende alla distribuzione normale al crescere di N
  - di solito per N≥12 si assume buona l'approssimazione
  - quindi basta estrarre 12 variabili uniformi U_i

$$X = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6$$

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Esempio: Gaussiana**
  - un approccio più furbo ottiene due campioni indipendenti della variabile normale con due sole estrazioni
  - si basa sull'osservazione che:
    - *un vettore 2-dim avente componenti cartesiane gaussiane ed indipendenti ha:*
      - » *modulo con distribuzione di Rayleigh*
      - » *fase uniforme in* $(0,2\pi)$

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Esempio: Gaussiana**
  - quindi:
  - si estraggono due variabili, U_1 ed U_2, uniformi in (0,1)
  - si valutano X ed Y:

$$X = \sqrt{-2\ln U_1}\,\cos(2\pi U_2)$$

$$Y = \sqrt{-2\ln U_1}\,\mathrm{sen}(2\pi U_2)$$

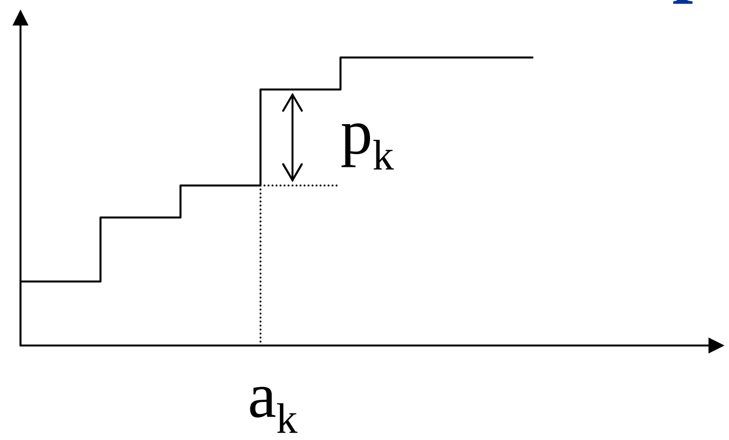
  - che risultano variabili casuali normali indipendenti

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Variabili casuali discrete:**
  - **si consideri una variabile casuale discreta descritta della distribuzione di probabilità:**

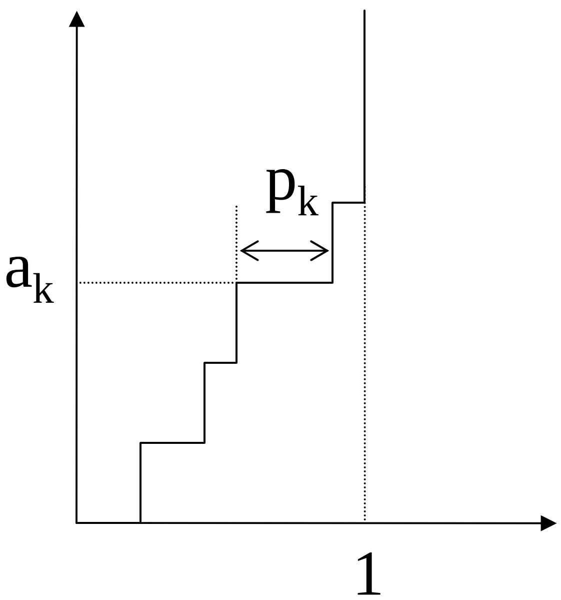
$$P\{X = a_k\} = p_k \qquad\qquad k = 1,\ldots,m.$$

  - **la $F_X(x)$ è una funzione del tipo:**



Generazione di numeri pseudo casuali

- **Variabili casuali discrete:**
  - **che invertita diventa**



- **La relazione che sintetizza la variabile è dunque:**

$$\text{set } x = a_k \text{ se e solo se :}$$

$$p_1 + \ldots + p_{k-1} < u \le p_1 + \ldots + p_{k-1} + p_k$$

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Variabili casuali discrete:**
  - **Esempio:**
  - **si sintetizzi una variabile aleatoria X che assume il valore 1 con probabilità p ed il valore 0 con probabilità 1-p**
  - **basta porre:**

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \le u \le \mathrm{p} \\ 0 & \text{se} \quad \mathrm{p} < u \le 1 \end{cases}$$

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Variabili casuali discrete:**
  - Naturalmente la cosa si complica con distribuzioni discrete con m infinito
  - occorre fermare m ad un valore finito
  - il numero m determina il numero di confronti che occorre fare nella routine di assegnazione e, quindi, la velocità della routine stessa
  - per alcuni casi è possibile adottare degli espedienti.

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Esempio: Distribuzione Geometrica**
  - **si ha:**

$$P\{x=k\}=p(1-p)^{k-1} \quad \mathrm{k}=1,2\ldots.$$

  - **si consideri una v.a. Esponenziale Z; si ha:**

$$P\{n \le Z \le n+1\}=(1-e^{-(n+1)/\lambda})-(1-e^{-n/\lambda})=e^{-n/\lambda}(1-e^{-1/\lambda})$$

  - **tale valore risulta pari alla *P(X=n+1)* se si impone che:**

$$1-p=e^{-1/\lambda};\lambda=-\frac{1}{\ln(1-p)}$$

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Esempio: Distribuzione Geometrica**
  - **quindi per generare una variabile geometrica basta:**
    - *1. Generare una variabile U uniforme in (0,1)*
    - *2. Ricavare una variabile esponenziale*

$$Z = \frac{\ln U}{\ln(1-p)}$$

    - *3. Settare*

$$X = \lfloor 1 + Z \rfloor$$

Generazione di numeri pseudo casuali

- **Esempio: Distribuzione di Poisson**
  - **con la distribuzione di Poisson le cose si complicano e quindi non ci possono essere scorciatoie al problema:**
    - *1. set k:=0, A:= e^{-a}, p:=A*
    - *2. U:=rand(seed)*
    - *3. While U>p*
      - » *k:=k+1*
      - » *A:=A*a/k*
      - » *p:=p+A*
    - *4. return k*

$$P\{X = k\} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

Analisi e convalida dei risultati

- Una volta costruito il modello di simulazione e il software che lo implementa occorre:
  - decidere cosa misurare (quali variabili d’uscita)
  - essendo anche le variabili d’uscita aleatorie occorre decidere con quali parametri caratterizzare tali variabili (media, varianza, percentili distribuzione)
  - adottare degli opportuni stimatori per i parametri
  - valutare l’accuratezza (“confidenza”) della stima

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: stima della media

- **Sia data una popolazione la cui distribuzione è *f(x), avente* media $E[x] = \eta$ e varianza $\sigma^2(x) = \sigma^2$**
- **siano $[x_1, x_2, \ldots , x_n]$ n osservazioni indipendenti**
- **la media campionaria è definita da**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: stima della media

- la media campionaria è anch'essa una v.a. con:

$$E[\bar{x}] = \eta ; \qquad \sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- per n grande la media campionaria è una variabile normale, e quindi la variabile:

$$z = \frac{\bar{x} - \eta}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- si può assumere normale con media nulla e varianza unitaria

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: stima della media

- **la distribuzione F(z) della normale si trova tabulata**
- **sia u_α un valore tale che**

$$F(u_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$$

- **si ha:**

$$P\{-u_{1-\alpha/2} \le z \le u_{1-\alpha/2}\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{-u_{1-\alpha/2} \le \frac{\bar{x}-\eta}{\sigma/\sqrt{n}} \le u_{1-\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: stima della media

- **e quindi**

$$P\left\{ \bar{x} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \eta \le \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} \right\} = 1-\alpha$$

- **la costante *(1-α)* è di solito espressa in percentuale ed è detta <u>livello di confidenza</u>**

- **l'intervallo** $\left(\bar{x} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

- **è detto <u>intervallo di confidenza</u>**

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: stima della media

- comunemente si adotta un livello di confidenza del 95% per il quale si ha:

$$\alpha = 0.05$$

$$u_{1-\alpha/2} = 1.96$$

- ciò significa che η cade nell'intervallo:

$$\left(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

- con un probabilità del 95%

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: stima della media

- purtroppo la varianza σ^2 non è nota
- σ^2 deve essere sostituita con la varianza campionaria definita come:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

- in questo modo però la variabile:

$$t = \frac{\bar{x} - \eta}{s/\sqrt{n}}$$

- non è più normale ma ha distribuzione t-student con n-1 gradi di libertà

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: stima della media

- nei casi con n grande (>30) è possibile approssimare la t-student con la distribuzione normale
- ma per valori di n minori è necessario fare riscorso alla distribuzione delle t-student con il corrispondente numero di gradi di libertà
- come vedremo per simulazioni Monte-Carlo valori di n>30 sono comuni, mentre per simulazioni temporali n è di solito più piccolo

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: stima della media

```
// t-distribution: given p-value and degrees of freedom,
// return t-value; adapted from Peizer & Pratt JASA, vol63, p1416
double tval(double p, int df) {
     double t;
     int positive = p >= 0.5;
     p = (positive)? 1.0 - p : p;
     if (p <= 0.0 || df <= 0) t = HUGE_VAL;
     else if (p == 0.5) t = 0.0;
     else if (df == 1) t = 1.0 / tan((p + p) * 1.57079633);
     else if (df == 2) t = sqrt(1.0 / ((p + p) * (1.0 - p)) - 2.0);
     else    {
             double ddf = df;
             double a = sqrt(log(1.0/(p*p)));
             double aa = a*a;
             a = a - ((2.515517+0.802853*a+0.010328*aa) /
                     (1.0+1.432788*a+0.189269*aa+0.001308*aa*a));
             t = ddf - 0.666666667 + 1.0 / (10.0 * ddf);
             t = sqrt(ddf*(exp(a*a*(ddf-0.833333333)/(t * t))-1.0));
             }
     return (positive)? t : -t;
     }
```

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: operazioni sugli intervalli di confidenza

- **indichiamo gli intervalli di confidenza di due variabili come**

$$P\{x_l \le x \le x_u\} = 1 - \alpha_x; \qquad P\{y_l \le y \le y_u\} = 1 - \alpha_y;$$

- **si può verificare che:**

$$P\{Ax_l + B \le Ax + B \le Ax_u + B\} = 1 - \alpha_x;$$
$$P\{x_l - y_l \le x - y \le x_u - y_u\} \ge 1 - \alpha_x - \alpha_y;$$

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: stima della varianza

- **un metodo diretto per stimare la varianza fa ricorso all'espressione**

$$\sigma^2(x) = E[x^2] - E^2[x]$$

- **considerando le popolazioni $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ e $[(x_1)^2, (x_2)^2, \ldots, (x_n)^2]$ è possibile stimare l'intervallo di confidenza della media di x e di x^2**
- **i due intervalli si possono poi combinare grazie alle espressioni precedenti**

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima:

- I risultati visti fino ad ora sono basati sull'assunzione fondamentale che:
  - le variabili osservate siano stazionarie
  - la misura non sia affetta dallo stato iniziale
  - le osservazioni siano indipendenti
- l'ipotesi di indipendenza è quella più difficile da verificare ed ottenere nei casi pratici
- l'indipendenza delle osservazioni dipende dalle caratteristiche di correlazione della variabili osservate che non si conoscono

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: osservazioni correlate

- **Lo stimatore del valor medio continua ad essere uno stimatore non polarizzato**

$$E[\bar{x}] = \eta$$

- **ma la sua varianza risulta adesso pari a:**

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\rho_k\right\}$$

- **dove il coefficiente di correlazione ρ_k vale:**

$$\rho_k = \frac{E\left[(x_i - \eta)(x_{i+k} - \eta)\right]}{\sigma^2}$$

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: osservazioni correlate

- La stima dell'intervallo di confidenza richiede dunque la conoscenza della funzione di autocorrelazione del processo che in generale non è nota
- si potrebbe ricorrere a stimatori dell'autocorrelazione, ma la complessità e il carico computazione diverrebbero eccessivi
- in realtà si ricorre a due differenti approcci per costruire delle sequenze indipendenti

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: osservazioni correlate

- **1) prove ripetute**
  - **si costruiscono N osservazioni indipendenti del processo ripetendo N volte la simulazione con N diversi generatori di numeri casuali**
  - **gli N valori stimati su ogni simulazione sono usati come campioni indipendenti per la valutazione dell'intervallo di confidenza**
- **questo approccio implementa di fatto una generalizzazione della simulazione Monte-Carlo**
- **risulta utile in molti casi pratici, ma di fatto è usato solo quando il secondo metodo non si può usare**

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: osservazioni correlate

- 2) suddivisione in intervalli di osservazione (*run*)
  - la simulazione viene divisa in N blocchi, ognuno composto da un certo numero di osservazioni K
  - si valuta la media della variabile d'uscita in ciascun blocco
  - si dimostra che con K sufficientemente grande le medie di ciascun blocco sono indipendenti
  - si valuta l'intervallo di confidenza sulla base delle stime ottenute in ogni run
- questo approccio risulta approssimato
- a volte può non essere agevole controllare che il numero K di osservazioni sia lo stesso per ogni run

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: osservazioni correlate

- **Esempio:**
  - si consideri una coda mD/D/1
  - m flussi con inter-arrivi deterministici di durata T vengono offerti ad un servente
  - la durata del servizio è anch'essa deterministica e pari ad S
  - le fasi relative dei flussi sono casuali (uniformi tra 0 e T)
  - si dimostra che:
    - i ritardi sono periodici e dipendono solo dalle fasi iniziali
  - occorre ripetere l'esperimento un numero N sufficientemente grande di volte con fasi casuali per ottenere delle stima valide del ritardo medio

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: osservazioni correlate

- **in alcuni casi il processo in misura è un processo di rinnovo ed è possibile sfruttare i punti di rinnovo per avere osservazioni indipendenti**
- **un processo di rinnovo è caratterizzato da una serie di istanti di rinnovo [b_1, b_2, b_3, ...]**
- **in tali istanti il processo torna in uno stesso stato**
- **l'evoluzione del processo negli intervalli [b_{n-1}, b_n] risulta indipendente da intervallo ad intervallo**
- **le misure effettuate sul processo in intervalli distinti risultano indipendenti ed è possibile applicare le formule per la stima della confidenza**

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: osservazioni correlate

- Esempio 1:
  - è facile convincersi che per i sistemi a coda con arrivi generali e servizi generali, l'istante di tempo in cui arriva una nuova richiesta e questa trova la coda vuota rappresenta un istante di rinnovo dell'intero sistema. Infatti:
  - lo stato del sistema è lo stesso
  - un nuovo periodo di inter-arrivo non è iniziato e quindi non c'è memoria
  - un nuovo tempo di servizio non è iniziato e quindi non c'è memoria
  - il sistema è vuoto e quindi non c'è memoria di utenti in attesa

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima: osservazioni correlate

- Esempio 2:
  - si consideri un sistema a coda di tipo M/G/1
  - si effettui una simulazione per misurare il ritardo di attraversamento del sistema
  - si considerino come campioni i ritardi sperimentati da ogni utente
  - è facile convincersi che tali campioni sono correlati
  - infatti, ad esempio gli arrivi immediatamente successivi a uno che trova il sistema vuoto osserveranno ritardi bassi, mentre arrivi consecutivi con il sistema molto carico osserveranno ritardi alti
  - dividendo la simulazione in run di uguale lunghezza temporale non si controlla il numero K_i di campioni per run e occorre fare run lunghi per avere una dispersione dei K_i bassa.

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima:

- anche assumendo di aver risolto il problema della stima rimane quello della stazionarietà
- anche se il processo è stazionario si è costretti ad iniziare la simulazione da uno stato iniziale
- lo stato iniziale influenza le statistiche raccolte nella prima parte della simulazione fino a che il sistema non raggiunge un comportamento, appunto, stazionario
- l’approccio più semplice consiste nell’eliminare dalle statistiche i risultati raccolti durante l’intervallo iniziale

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima:

- il problema è quanto deve essere lungo il periodo del quale non si raccolgono le statistiche
- purtroppo non esistono regole precise per decidere quando iniziare a raccogliere i dati
- in linea teorica occorrerebbe stimare l'autocorrelazione del processo sotto misura e considerare come transitorio l'intervallo di tempo fino a che l'autocorrelazione non assume valori trascurabili
- di fatto anche la stima dell'autocorrelazione risulta operazione complessa e quindi si ricorre a metodi "empirici"

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima:

- naturalmente, nel caso in cui si conoscano i punti di rigenerazione del processo sotto misura il problema del transitorio è risolto
  - basta eliminare i dati fino al primo punto di generazione
  - oppure partire dallo stato dei punti di rigenerazione e tenere buoni tutti i dati statistici
- altrimenti occorre avere idea delle costanti di tempo coinvolte nella determinazione dello stato del processo
- è poi possibile procedere per tentativi

Analisi e convalida dei risultati

Problema della stima:

- **Esempio:**
- **nei sistemi a coda il tempo necessario alla stabilizzazione del sistema dipende dal carico**
- **man mano che ρ tende ad 1 il sistema impiega più tempo per raggiungere uno stato stabile**
- **in un certo senso ρ vicino ad uno significa sistema quasi instabile**
- **Problema: come si fa a capire se il sistema è stabile oppure no nel caso in cui questo non si possa evincere dai parametri d'ingresso?**

Per ulteriori approfondimenti

- Donald E. Knuth, “The Art of Computer Programming”, Second Edition, Addison Wesley Publishing Company, Reading MA, 1981 (in particolare, Volume 2: “Seminumerical Algorithms”)