1. Si supponga di disporre di un generatore di numeri pseudo-causali uniformi [0,1]. Si indichi un procedimento per:
   a) sintetizzare una variabile uniforme tra [-1,10]
   b) sintetizzare una variabile uniforme negli intervalli [-3,-1] e [1,3]
   c) sintetizzare una variabile avente densità di probabilità: $f_X(x) = x^2 \quad 0 \le x \le \sqrt[3]{3}$
   d) sintetizzare una variabile con densità di probabilità: $f_X(x) = \dfrac{1}{2\lambda} e^{-|x|/\lambda} \quad -\infty \le x \le +\infty$

Soluzione

a) $X = -1 + 11 \cdot U$

b) se U<1/2

$X = -3 + 2 \cdot 2U$

altrimenti

$X = 1 + 2 \cdot 2(U - 1/2)$

c)

$$F_X(x) = \int f_X(x)dx = \frac{x^3}{3}$$

$$F_X^{-1}(x) = \sqrt[3]{3y}$$

$$X = \sqrt[3]{3U}$$

d)

si estrae una variabile U1: se U1<1/2

$X = -\lambda(\ln(U2))$

altrimenti:

$X = \lambda(\ln(U2))$

1. Si supponga di disporre di un generatore di numeri pseudo-casuali uniformi tra [0,1]. Si indichi un procedimento per:
   a) sintetizzare una variabile uniforme tra [-5,5]
   b) sintetizzare una variabile avente densità di probabilità $f_X(x) = x^2 \quad 0 \le x \le \sqrt[3]{3}$
   c) sintetizzare una variabile discreta geometrica con media 8
   d) sintetizzare una variabile esponenziale negativa troncata: $f_X(x) = \dfrac{1}{\lambda(1\text{-}e^{-a/\lambda})} e^{-x/\lambda} \qquad 0 \le x \le a$

Soluzione

a) $X = -5 + 10 \cdot U$

b)

$$F_X(x) = \int f_X(x)dx = \frac{x^3}{3}$$

$$F_X^{-1}(x) = \sqrt[3]{3y}$$

$$X = \sqrt[3]{3U}$$

c)

$$X = \left\lfloor \frac{\ln(U)}{\ln(1-p)} \right\rfloor$$

$$p = 1/8 = 0{,}125$$

d)

Metodo A:

si sintetizza una esponenziale non troncata $f_X(x) = \dfrac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}$

se x>a si ripete l'estrazione

Metodo B:

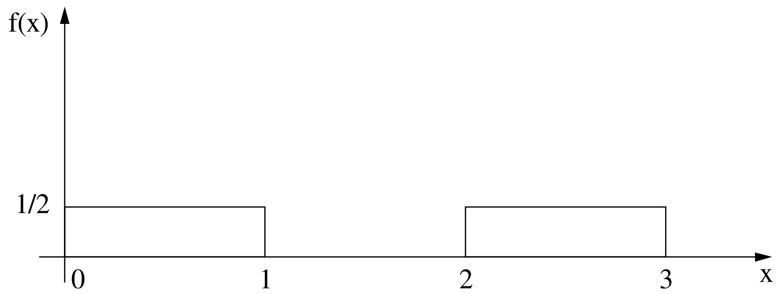
$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\lambda(1\text{-}e^{-a/\lambda})} e^{-x/\lambda} dx = \frac{(1\text{-}e^{-x/\lambda})}{(1\text{-}e^{-a/\lambda})}$$

$$F_X^{-1}(x) = -\lambda(\ln(1 - x(1\text{-}e^{-a/\lambda}))$$

$$X = -\lambda(\ln(1 - U(1\text{-}e^{-a/\lambda}))$$

1. Si supponga di disporre di un generatore di numeri pseudo-casuali uniformi tra [-1,1]. Si indichi un procedimento per:

   a) sintetizzare una variabile uniforme tra [-2,+3]
   b) sintetizzare una variabile avente la densità di probabilità f(x) illustrata in figura:




   c) sintetizzare una variabile avente densità di probabilità $f_X(x) = 4x^3 \quad 0 \le x \le 1$
   d) sintetizzare una variabile discreta esponenziale negativa con media pari a 5

## SOLUZIONE:

a)Sia Y la variabile uniforme tra [-1,1]. Per ottenere la variabile U uniforme tra [0,1] devo calcolare:

$$U = \frac{1}{2}(Y+1)$$

Quindi la variabile si sintetizza nel seguente modo:

$$X = 5U - 2$$

b)Si estrae la variabile U definita nella risposta precedente, e si esegue la seguente procedura:

se U<1/2
    X=2U
se U>=1/2
    X=2U+1

c)Si estrae la variabile U definita nella risposta a), e si pone:

$$X = \sqrt[4]{U}$$

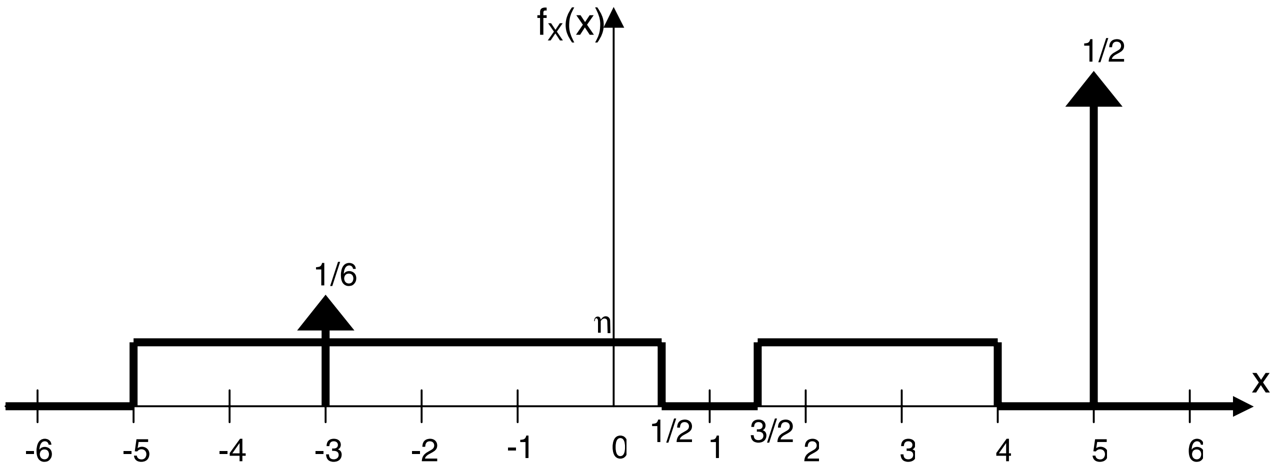
d)Si pone:

$$X = -5\log(U)$$

ESERCIZIO
Sintetizzare una variabile aleatoria X che:
- assuma il valore -3 con probabilità 1/6 ;
- assuma il valore 5 con probabilità 1/2 ;
- con probabilità 1/3, abbia distribuzione uniforme negli intervalli [-5,1/2] e [3/2,4],
supponendo di avere a disposizione un generatore di numeri pseudo-casuali distribuiti uniformente tra 0 e 1.

------------------------

La densità di probabilità di X, $f_X(x)$, è la seguente:




Il parametro η della $f_X(x)$ non è noto, ma si può determinare imponendo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{6}\delta(x+3) + \frac{1}{2}\delta(x-5) + \eta I_{[-5,1/2]\cup[3/2,4]}(x))dx = 1$$

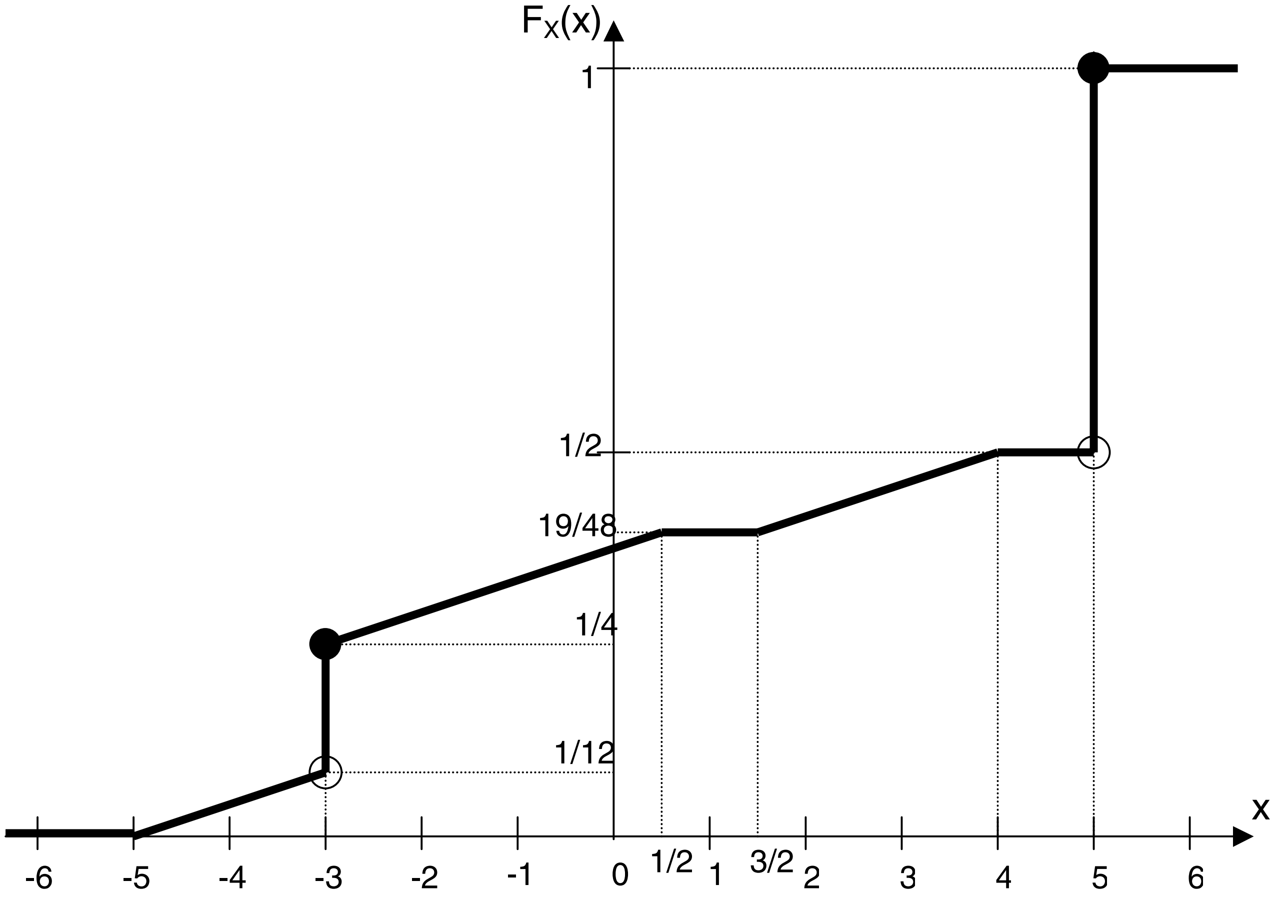
$$\Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \eta(\frac{11}{2} + \frac{5}{2}) = 1 \Rightarrow \eta = \frac{1}{24}$$

Integrando la $f_X(x)$ si ottiene la CDF $F_X(x)$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} (\frac{1}{6}\delta(x+3) + \frac{1}{2}\delta(x-5) + \frac{1}{24} I_{[-5,1/2]\cup[3/2,4]}(x))dx$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{\textit{quando}} \quad x \in (-\infty, -5) \\ \int_{-5}^{x} \frac{1}{24}dx = \frac{1}{24}x + \frac{5}{24} & \textbf{\textit{quando}} \quad x \in [-5, -3) \\ \frac{1}{6} + \int_{-5}^{x} \frac{1}{24}dx = \frac{1}{24}x + \frac{9}{24} & \textbf{\textit{quando}} \quad x \in [-3, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{6} + \int_{-5}^{1/2} \frac{1}{24}dx = \frac{19}{48} & \textbf{\textit{quando}} \quad x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \\ \frac{19}{48} + \int_{3/2}^{x} \frac{1}{24}dx = \frac{1}{24}x + \frac{1}{3} & \textbf{\textit{quando}} \quad x \in [\frac{3}{2}, 4) \\ \frac{1}{2} & \textbf{\textit{quando}} \quad x \in [4, 5) \\ 1 & \textbf{\textit{quando}} \quad x \in [5, +\infty) \end{cases}$$

Il grafico di $F_X(x)$ è il seguente:




tenuto conto che: $\lim_{x \to (-3)^-} F_X(x) = 1/12$ e che, essendo una CDF, $F_X(x)$ è monotona non decrescente e continua a destra.
Mediante il metodo del percentile, invertendo la funzione $F_X(x)$, si può ottenere X come funzione di una variabile aleatoria U con distribuzione uniforme tra zero e uno:

$$X = F_X^{-1}(U) = \begin{cases} 24U - 5 & \textbf{\textit{quando}} \quad U \in (0, \frac{1}{12}] \\ -3 & \textbf{\textit{quando}} \quad U \in (\frac{1}{12}, \frac{3}{12}] \\ 24U - 9 & \textbf{\textit{quando}} \quad U \in (\frac{3}{12}, \frac{19}{48}] \\ 24U - 8 & \textbf{\textit{quando}} \quad U \in (\frac{19}{48}, \frac{1}{2}] \\ 5 & \textbf{\textit{quando}} \quad U \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$